QUESTÃO 1

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in \cap B$ **é :** $x \notin A \text{ ou } x \notin B.$

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

III. $(A / B) \cup (B / A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$**.**

Destas, é (são) falsa(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e III.
e) apenas nenhuma.

RESOLUÇÃO

I. Se $x \notin A \cap B$ então $x \in (A \cap B)^C$, mas $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Logo $x \in \left(A^C \cup B^C\right) \Rightarrow x \in A^C \text{ ou } x \in B^C \Rightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$ verdadeiro

II. Pela propriedade distributiva temos que
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ verdadeiro

III. $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^\mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}^\mathrm{C}) =$

$= \left[\left(A \cap B^C\right) \cup B\right] \cap \left[\left(A \cap B^C\right) \cup A^C\right]$

$= \left[(A \cup B) \cap \left(B^C \cup B\right)\right] \cap \left[\left(A \cup A^C\right) \cap \left(B^C \cup A^C\right)\right]$

$= \left((A \cup B) \cap U\right) \cap \left[U \cap \left(B^C \cup A^C\right)\right] = (A \cup B) \cap (B \cap A)^C$ verdadeiro

Resposta: letra e

QUESTÃO 2

Considere conjuntos A, B $\subset \mathbb{R}$ e C $\subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são os domínios das funções reais definidas por $In\left(x-\sqrt{\pi}\right), \sqrt{-x^2+6x-8}$ e $\sqrt{\dfrac{x-\pi}{5-x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que

a) $C =]\sqrt{\pi}, 5[$.

b) $C = [2, \pi]$.

c) $C = [2, 5]$.

d) $C = [\pi, 4]$.

e) C não é intervalo.

RESOLUÇÃO

Considerando

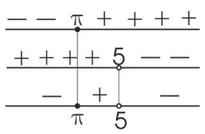
$$f(x) = \ell n\left(x-\sqrt{\pi}\right)$$
$$g(x) = \sqrt{-x^2+6x-8}$$
$$h(x) = \sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}$$
$$Df: x-\sqrt{\pi} > 0$$

$x > \sqrt{\pi}$, logo A $\cup$ B: $\left\{x \in \mathbb{R} / x > \sqrt{\pi}\right\}$

$$Dg: -x^2+6x-8 \le 0$$
$$x^2-6x+8 \le 0$$

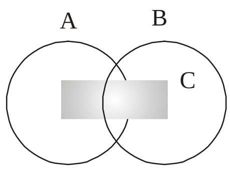
logo A $\cap$ C: $\{x \in \mathbb{R} / 2 \le x \le 4\}$

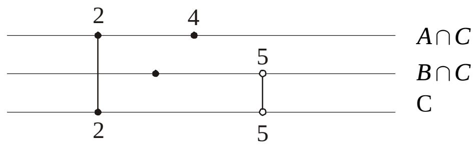
$$Dh: \frac{x-\pi}{5-x} \ge 0$$



$B \cap C: \{x \in \mathbb{R} / \pi \le x < 5\}$

Então o conjunto C será: $(A \cap C) \cup (B \cap C)$





$C = [2,5[$

Resposta: letra c

QUESTÃO 3

Se *z* é uma solução da equação em $\mathbb{C},\ z-\overline{z}+|z|^2=-\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}-i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12}$**, pode-se afirmar que**

a) $i\left(z-\overline{z}\right)<0.$

b) $i\left(z-\overline{z}\right)>0.$

c) $|z|\in[5,6].$

d) $|z|\in[6,7].$

e) $\left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|>8.$

RESOLUÇÃO

$$z-\overline{z}+|z|^2=-\left[\frac{2-\sqrt{2}}{3}-\frac{i\left(2+\sqrt{2}\right)}{3}+\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)i}{3}+\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right]^{12}$$

$$=-(1-i)^{12}=-\left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{7\pi}{4}\cdot 12+i sen\frac{7\pi}{4}\cdot 12\right)$$

$$=-2^6\cdot(-1)=64$$

$$\Rightarrow a+bi-a+bi+a^2+b^2=64$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+bi=64\Rightarrow b=0\ e\ a^2+b^2=64$$

$$\Rightarrow a=\pm 8$$

Logo z = 8 ou z = – 8 e $\left|z+\frac{1}{z}\right|>8$

Resposta: letra e

QUESTÃO 4

Os argumentos principais das soluções da equação em z, $iz + 3\overline{z} + \left(z + \overline{z}\right)^2 - i = 0$, **pertencem a**

a) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

b) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$.

c) $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

d) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$.

e) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

RESOLUÇÃO

$$iz + 3\overline{z} + \left(z + \overline{z}\right)^2 - i = 0$$
$$i(a+bi) + 3(a-bi) + (a+bi+a-bi)^2 - i = 0$$
$$ai - b + 3a - 3bi + 4a^2 - i = 0$$
$$\left(4a^2 + 3a - b\right) + i(a - 3b - 1) = 0$$
$$4a^2 + 3a - b = 0$$
$$a - 3b - 1 = 0 \rightarrow a = 3b + 1$$
$$4(3b+1)^2 + 3(3b+1) - b = 0$$
$$4\left(9b^2 + 6b + 1\right) + 9b + 3 - b = 0$$
$$36b^2 + 24b + 4 + 8b + 3 = 0$$
$$\Delta = 1024 - 1008 = 16$$

$$b = \frac{-32 = 4}{72} \quad \begin{cases} \frac{-36}{72} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-28}{72} = -\frac{7}{18} \end{cases}$$

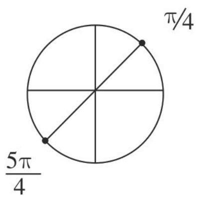
Se $b = -\frac{1}{2} \therefore a = 3\left(\frac{-1}{2}\right) + 1 = \frac{-3}{2} + 1 = \frac{-1}{2}$

Se $b = \frac{17}{18} \therefore a = 3\left(\frac{-7}{18}\right) + 1 = \frac{-21}{18} + 1 = \frac{-3}{18} = \frac{-1}{6}$

$tg\theta_1 = \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{5\pi}{4}$

logo

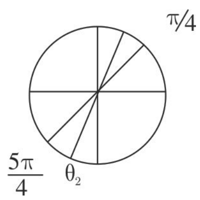
$z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$



$tg\theta_2 = -\frac{7}{18} \cdot -6 = \frac{7}{3}$

logo

$z = -\frac{1}{6} - \frac{7i}{18}$



Resposta: letra c

QUESTÃO

5

Considere a progressão aritmética (a_1, a_2, ... , a_{50}) de razão d. Se $\sum_{n=1}^{10} an = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} an = 4550$, **então** $d - a_1$ **é igual a**

a) 3
b) 6
c) 9
d) 11
e) 14

RESOLUÇÃO

$a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 10 + 25d$
$S_{10} = 10 + 25d$
$(a_1 + a_{10}) \cdot 10 = +25d$
$(a_1 + a_1 + 9d) \cdot 5 = 10 + 25d$
$2a_1 + 9d = 2 + 5d$
$2a_1 = 2 - 4d$

$\boxed{a_1 = 1 - 2d}$

$a_1 + a_2 + ... + a_{50} = 4550$
$S_{50} = 4550$
$a_1 + a_1 + 49d = 182$
$2a_1 + 49d = 182$
$2(1 - 2d) + 49d = 182$
$2 - 4d + 49d = 182$
$45d = 180$
$d = 4$
$a_1 = 1 - 2 \cdot 4$
$a_1 = -7$

logo: $d - a_1 = 11$

Resposta: letra d

PÓDION

QUESTÃO 6

Seja, *f, g* : R $\rightarrow$ R tais que *f* é apra e g é impar. Das seguintes afirmações:

I. *f* . *g* é ímpar,
II. *f* o *g* é par,
III. *g o f* é ímpar

é (são) verdadeira(s)
a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) todas

RESOLUÇÃO

f é par, então $f(x) = f(-x)$
g é ímpar, então $g(-x) = -g(x)$

I. $h(x) = f(x) \cdot g(x) = y$

$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x) = -y$

$h(x) = -h(-x)$, h é ímpar (verdadeira)

II. $h(x) = f(g(x)) = fog(x)$

$h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = fog(x)$

$h(x) = h(-x)$, h é par (verdadeira)

III. $h(x) = g(f(x)) = gof(x)$

$h(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = gof(x)$

$h(x) = h(-x)$, h é par (falsa)

Resposta: letra d

QUESTÃO 7

A equação em x, $arctg\left(e^x+2\right)-arc\cot g\left(\dfrac{e^x}{e^{2x}-1}\right)=\dfrac{\pi}{4}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

a) admite infinitas soluções, todas positivas.
b) admite uma única solução, e esta é positiva.

c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right[$.

d) admite apenas soluções negativas.
e) não admite solução.

<u>RESOLUÇÃO</u>

$$arctg\left(e^x+2\right)-arctg\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)=\frac{\pi}{4}(I)$$

$$\alpha=arctg\left(e^x+2\right)\Rightarrow tg\ \alpha=e^x+2,\ \ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\beta=arc\cot g\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)\Rightarrow \cot g\ \beta=\frac{e^x}{e^{2x}-1},\ \ \beta\in(-\pi,\pi)$$

$$tg\beta=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$$

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4}+\beta$$

$$tg\alpha=tg\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$$

$$tg\alpha=\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\beta}{1-tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\beta}$$

$$ex+2=\frac{1+\dfrac{e^{2x}-1}{ex}}{1-\dfrac{e^{2x}-1}{ex}}$$

$$e^x+2=\frac{\dfrac{e^x+e^{2x}-1}{e^x}}{\dfrac{e^x-e^{2x}+1}{e^x}}$$

$$e^x+2=\frac{e^x+e^{2x}-1}{e^x-e^x+1}\ \text{fazendo } e^x=a$$

$$a+2=\frac{a+a^2-1}{a-a^2+1}$$

$$a^2-a^3+a+2a-2a^2+2=a+a^2-1$$

$$-a^3-2a^2+2a+3=0$$

$$a^3+2a^2+2a-3=0$$

Testando a = – 1

-1	1	2	- 2	-3
	1	1	- 3	0

$$a^2+a-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

Se $a=-1$ então $e^x=-1$ (não existe $x\in\mathbb{R}$ que satisfaça)

Se $a=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$, $e^x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$

$$x=\ell n\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$$

Como $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$>1, x é positivo

Se $a=-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ então $e^x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ (não existe $x\in\mathbb{R}$ que satisfaça)

logo a equação admite uma única solução e esta é positiva

Resposta: leta b

QUESTÃO 8

Sabe-se que o polinômio *$p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$* , *$a \in \mathbb{R}$* , admite a raiz *$-i$*.
Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de *p*:
I. Quatro das raízes são imaginárias puras.
II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.
III. Apenas uma das raízes é real.
Destas, é (são) verdadeira(s) apenas.

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e III.
e) II e III.

<u>RESOLUÇÃO</u>

$x = i$ é raiz $\Rightarrow x - i$ divide *$P(x)$*
$x = -i$ é raiz $\Rightarrow x + i$ divide *$P(x)$*
$(x - i)(x + i)$ divide *$P(x)$*
x + 1 divide *$P(x)$*

$$x^5 - 1 - ax^2(-x + 1) = 0$$
$$(x - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + ax^2)$$
$$(x - 1)\left(x^4 + x^3 + (1 + a)x^2 + x + 1\right) = 0$$

$x = 1$ é raiz do *$P(x)$*.
Como x = i é raiz temos:

$$i^4 + i^3 + (1 + a)i + i^2 + i + 1 = 0$$
$$(1 + a)i = 0$$

$\boxed{a = -1}$

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \Big| \; x^2 + 1$$
$$x^2 + x + 1$$

Logo fazendo $x^2 + x + 1 = 0$, obtemos:

as outras raízes do *$P(x)$*, a saber $x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Resposta: letra c

QUESTÃO

9

Um polinômio real p(x) $p(x)=\sum_{n=0}^{5} a_n x^n$ **, com a5 = 4, tem três raízes real distintas, *a*, *b* e c, que satisfazem o sistema** $\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que *p*(1) é igual a

a) – 4.

b) – 2.

c) 2.

d) 4.

e) 6.

RESOLUÇÃO

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 & \text{x (-1)} \quad \text{x (-2)} \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ \cancel{2b} - 3c = 6 \\ \cancel{-2b} - 8c = 5 \end{cases}$$

- 11 c = 11

c = - 1 (raiz dupla)

2b – 3 (- 1) = 6

$b = \frac{3}{2}$ (raiz dupla)

$a + 2 \cdot \frac{3}{2} + 5(-1) = 0$

a + 3 – 5 = 0

a = 2 (raiz simples)

logo *p(x)* pode ser escrito na forma fatorada

$p(x) = a_5 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

$p(x) = 4 (x - 2)(x - \frac{3}{2})^2 (x + 1)^2$

$p(1) = -4$

Resposta: letra a

PÓDION

QUESTÃO 10

Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ **com coeficientes** $a_0 = -1$ **e** $a_n = 1 + ia_{n-1}$, **n = 1,2, ..., 15. Das afirmações:**

I. $p(-1) \notin \mathbb{R}$,

II. $|\,p(x)\,| \le 4(3+\sqrt{2}+\sqrt{2}), \forall x \in [-1,1]$,

III. $a_8 = a_4$,

É (são verdadeira(s) apenas
a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

__RESOLUÇÃO__

(a) $a_0 = -1$, $a_1 = 1 - i$, $a_2 = 2 + i$, $a_3 = 2i$, $a_4 = -1$
$a_0 = a_4 \Rightarrow a_1 = a_5 \Rightarrow a_2 = a_2 = a_6 \Rightarrow \boxed{a_4 = a_8} \Rightarrow$ $\boxed{\text{III Correto}}$

(b) $\sum_{i=0}^{15} a_i\, x^i = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)(1 + x^4 + x^8 + x^{12})$

$$\sum_{i=0}^{15} a_i\, x^i = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3).(1 + x^4 + x^8 + x^{12})$$

$$\le (|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + |a_3x^3|).(1 + x^4 + x^8 + x^{12})$$

como $x \in [-1, 1]$

$$\le (|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3|).(1 + 1 + 1 + 1)$$

$$\le (1 + \sqrt{2}+\sqrt{5} + 2)\,.\,4$$

$$\le (3 + \sqrt{2}+\sqrt{5})\,.\,4 \qquad \boxed{\text{II Correto}}$$

(c) $p(-1) = (a_0 - a_1 + a_2 - a_3)\,.\,(1 + 1 + 1 + 1)$

$p(-1) = 0\,.\,4 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{I Falso}}$

Resposta: letra e

QUESTÃO 11

Eexpressão $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5-(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5$ **é igual a**

a) 2630 $\sqrt{5}$ **.**

b) 2690 $\sqrt{5}$ **.**

c) 2712 $\sqrt{5}$ **.**

d) 1584 $\sqrt{15}$

e) 1604.

<u>RESOLUÇÃO</u>

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10\,a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ I
$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ II
I - II $= 10\,a^4b + 20\,a^2b^3 + 2b^5$
$= 2b\,(5a^4 + 10a^2b^2 + b^4)$

Substituíndo a $= 2\cdot\sqrt{3}$ e b $= \sqrt{5}$ obtemos:

$(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5-(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5 = 2\cdot\sqrt{5}\cdot(5\cdot16\cdot9+10\cdot12\cdot5+25)$

$= 2690\cdot\sqrt{5}$

Resposta: letra b

PÓDION

QUESTÃO 12

Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que,para cada um dos refletores, sejam de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

a) $\frac{16}{27}$.

b) $\frac{49}{81}$.

c) $\frac{151}{243}$.

d) $\frac{479}{729}$.

e) $\frac{2^4}{3^4} + \frac{2^5}{3^5}$.

__RESOLUÇÃO__

Para 4 refletores temos:

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot p_6^{4,2} = \frac{16}{\cancel{729}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 5}{\cancel{2}} \Rightarrow P = \frac{80}{243}$$

Para 5 refletores temos:

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot p_6^{5,1} \Rightarrow$$

$$P = \frac{32}{35} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cancel{6} \cdot = \frac{64}{243}$$

Logo para 4 ou 5 refletores temos:

$$P = \frac{80}{243} + \frac{64}{243} = \frac{144}{243} = \frac{16}{27}$$

Resposta: letra a

QUESTÃO

13

Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$**, em que** a_4 **= 10, det A = - 1000 e** a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 **e** a_6 **formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão d > 0. Pode-se afirmar que** $\frac{a_1}{d}$ **é igual a**

a) -4.
b) -3.
c) -2.
d) – 1.
e) 1.

RESOLUÇÃO

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 10 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$$

det A = 10 $a_1 . a_6$ = - 1000 $\Rightarrow$ $a_1 a_6$ = - 100
$a_1 (a_1 + 5d)$ = - 100
$a_1^2 + 5a_1 \cdot d = -100$ (I)
$a_4 = 10 \Rightarrow a_1 + 3d = 10 \Rightarrow a_1 = 10 - 3d$ (II)

Substuindo (II) em (I)

$(10- 3d)^2 + 5d\,(10 - 3d) = -100$
$100 - 60d + 9d^2 + 50d - 15d^2 = -100$
$-6d^2 - 10d + 200 = 0$
$6d^2 + 10d - 200 = 0$ 2
$3d^2 + 5d - 100 = 0$
$\Delta = 25 - 12\,(-100) = 1225$

$$d=\frac{-5\pm 35}{6} \begin{cases} \frac{-40}{6} = -\frac{20}{3} & \text{Não convém} \\ \frac{30}{6} = 5 \end{cases}$$

Logo d = 5 e a_1 = - 5, então $\frac{a_1}{d}=-1$

Resposta: letra d

QUESTÃO 14

Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{4x4}(\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente. Então, det(A^{-1}) e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

a) $\frac{1}{72}$ **e 12**

b) $\frac{1}{72}$ **e -12**

c) $-\frac{1}{72}$ **e 12**

d) $-\frac{1}{72}$ **e** $\frac{1}{72}$

e) $\frac{1}{72}$ **e** $\frac{1}{72}$

<u>RESOLUÇÃO</u>

$x_1 + 3x_1 + 9x_1 + 27x_1 = 0$
$40x_1 = 80$
$x_1 = 2$, logo $x_1 = 2$
$x_2 = 6$
$x_3 = 18$
$x_4 = 54$
$y_1 + 4y_1 + 16y_1 + 64y_1 = 255$
$y_1 = 3$, logo $y_2 = 12$
$y_3 = 48$
$y_4 = 192$

$$\text{logo } A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \div 2 \\ \div 3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$-6 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & 4 & 16 & 64 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{1} & 3 & 3 & 27 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 4 & 16 & 64 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} \begin{matrix} \div 4 \\ \\ \div 3 \end{matrix}$$

$$= -72 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$= -72\,(4 - 3)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{cof}A)t$$

$= -72$

então $\det(A^{-1}) = \frac{-1}{72}$

o elemento $(A^{-1})_{23} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{32}$

$$A_{32} = (-1)^5 . \begin{vmatrix} 2 & 18 & 54 \\ 3 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \div 4 \\ \div 3 \\ \\ \end{matrix}$$

$6.(-1)\,(576 - 432) = -864$

$(A^{-1})_{23} = -\frac{1}{72} \cdot (-864) = 12$

Resposta: letra c

QUESTÃO 15

O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)$ sen $\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$.

b) $\frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{\alpha}{243}\right) - sen\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.

c) cos $\left(\frac{\alpha}{243}\right)$ - cos $\left(\frac{\alpha}{729}\right)$.

d) $\frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.

e) cos $\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$.

RESOLUÇÃO

Usando prostaférese para o produto sen $\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)$ sen $\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$

cos p - cos q = - 2 sen $\left(\frac{p+q}{2}\right)$ sen $\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = \frac{2\alpha}{3^n} \\ \frac{p-q}{2} = \frac{\alpha}{3^n} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ p = $\frac{3\alpha}{3^n}$ = $\frac{\alpha}{3^{n-1}}$ e q = $\frac{\alpha}{3^n}$

logo

$$\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \text{ sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \frac{\cos q - \cos p}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \text{ sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \frac{\cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{3}}\right) - \cos\alpha}{2} + \frac{\cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{9}}\right) - \cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{3}}\right)}{2} + \frac{\cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{81}}\right) - \cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{27}}\right)}{2} +$$

$$\frac{\cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{243}}\right) - \cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{81}}\right)}{2} + \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{243}}\right)}{2} = -\frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$$

Resposta: letra a

QUESTÃO 16

Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \leq \alpha \leq \beta$, maximizam a soma senα + sen β, então α é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{3\pi}{5}$

d) $\frac{5\pi}{8}$

e) $\frac{7\pi}{12}$

<u>RESOLUÇÃO</u>

Por prostáferese temos:

$$\text{sen } \alpha + \text{ sen } \beta = 2\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{ sen } \alpha + \text{sen } \beta = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

logo para que sen α + sen β
assuma o maior valor possível
Temos que ter:

$$\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=1 \Rightarrow \frac{\beta-\alpha}{2}=2k\pi \text{ com } k \in Z \Rightarrow \beta - \alpha = 4k\pi, \text{ com } k \in Z$$

como $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$ **e** $0 \leq \alpha \leq \beta$ temos que ter $k = 0$. Sendo assim temos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4\pi}{3} \\ \beta - \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\beta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Resposta: letra b

QUESTÃO 17

Considerando as circunferências C_1 : $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e C_2 : $(x - 10)^2 + (y - 11)^2 = 9$.

Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

a) $5\sqrt{3}$

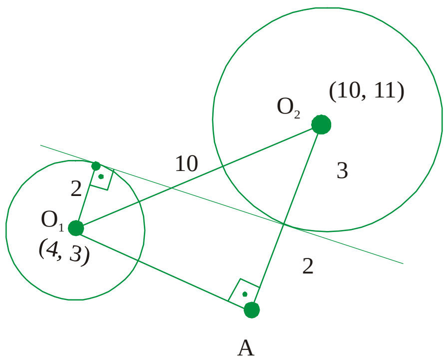
b) $4\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{6}$

d) $\frac{25}{3}$

e) 9

RESOLUÇÃO



Pela distância entre dois pontos temos:

$\overline{O_1O_2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

no Δ O_1O_2A (vide figura)
temos:
$10^2 = x^2 + 5^2$

$x = 5\sqrt{3}$

Resposta: letra a

QUESTÃO 18

Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *cm* está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 *cm*, o volume do cilindro, em *cm*³, é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

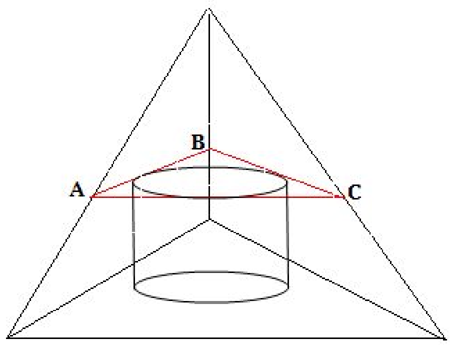
b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$

d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$

e) $\frac{\pi}{3}$

RESOLUÇÃO



A altura "H" de um tetraedro regular de aresta com medida "a" é dada por $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, a altura do tetraedro em questão é $\frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$, observa-se que a altura do cilindro é igual a 1/3 da altura tetraedro. Seja ℓ o lado do triângulo equilátero ABC (vide figura), temos que:

$$\frac{\ell}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \ell = 2$$

como o raio da circunferência inscrita a um triângulo equilatero é igual a $\frac{1}{3}\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$ temos que o raio da base do cilindro será igual $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Sendo assim temos que o volume (V) do cilindro será:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi \cdot \sqrt{6}}{9}$$

Resposta: letra d

QUESTÃO 19

Um triângulo equilátero tem os vértices no pontos A, B e C do plano xOy, sendo B = (2,1) e C = (5,5). Das seguintes afirmações:

I. A se encontra sobre a reta $y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{2}$,

II. A está na intersecção da reta $y=-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$ **com a circunferência** $(x-2)^2+(y-1)^2=25$,

III. A pertence às circunferência $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ e $\left(x-\frac{7}{2}\right)+(y-3)^2=75$, **é (são) verdadeira(s) apenas**

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

RESOLUÇÃO

Seja “r” a reta suporte do lado BC e “s” a reta suporte da altura do triângulo relativa ao lado BC.

Sendo assim temos:

$$\text{I) } m_s=-\frac{1}{m_r}$$

$$m_r=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5-1}{5-2}=\frac{4}{3}\Rightarrow m_s=-\frac{3}{4}$$

Assim podemos determinar a equação da reta “s”, uma vez que $M\left(\frac{7}{2},3\right)$ que é o ponto médio de $\overline{BC}$ pertence a “s”.

$$y-3=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{7}{2}\right)$$
$$y-3=\frac{-3x}{4}+\frac{21}{8}$$
$$y=-\frac{3x}{4}+\frac{21}{8}+3$$
$$y=-\frac{3x}{4}+\frac{45}{8}(s)$$

logo I é falso.

II) A circunferência $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ tem centro $(2,1)$ que é o ponto B e raio 5. Como a distância $d_{AB}=d_{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ = Raio, a afirmação II é verdadeira.

III) A circunferência $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{75}{4}$ tem centro $M\left(\frac{7}{2},3\right)$ que é o ponto médio de $\overline{BC}$ e raio $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Como a distancia d_{AM} é a altura “h” do triângulo equilátero e $h=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ = Raio, a afirmação é verdadeira

Resposta: letra e

QUESTÃO 20

Sejam A, B, C e D os vértices de tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio de seguimento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm², é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

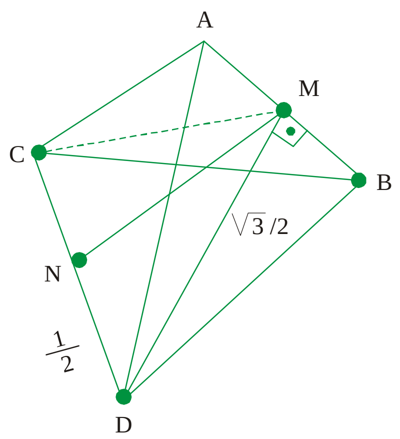
b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

RESOLUÇÃO



$\overline{MD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois trata-se da altura do triângulo equilatero ABC de lado 1.

$ND = \frac{1}{2}$, pois N é ponto médio de CD

MN é MCD é perpendicular a CD, pois o triângulo MCD é isósceles de base CD.
Sendo assim, denotando por *"x"* a medida do segemento MN e por "A" a área do triângulo MND temos:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Resposta: letra b