MATEMÁTICA

PROVA DE BOLSAS

15 DE DEZEMBRO

ITA

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

RESOLUÇÃO PROVA ITA

2014 / 2015


Mais uma vez o Pódion arrebenta no
IME
24 aprovados em Brasília
18 são Pódion
Concurso 2013 / 2014

QUESTÃO

1

Considere as seguintes afirmações sobre os números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $\ln \sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

a) nenhuma.
b) apenas II.
c) apenas I e II.
d) apenas I e III.
e) I, II e III.

Resolução: Alternativa D

I - (V) Toda dízima periódica pode ser representada por um número racional.

II - (F) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Logo, esse somatória, é uma progressão geométrica (PG) de razão $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Fazendo a soma infinita:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

Substituindo na expressão original:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

III. (V) $\ln \sqrt[3]{e^2} = \ln e^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$$(\log_3 2)(\log_4 9) =$$

$$(\log_3 2)(\log_{2^2} 3^2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_3 2 \cdot \log_2 3 = \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 2} = 1$$

O valor da expressão apresentada é: $\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \in Q$.

QUESTÃO 2

Sejam *A, B* e *C* os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2 - 3i| < \sqrt{19}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| < 7/2\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 6z + 10 = 0\}$. Então, $(A \setminus B) \cap C$ é o onjunto

a) {-1-3i, -1+3i}.
b) {-3 -i, -3 +i}.
c) {-3 +i}.
d) {-3 -i}.
e) {-1 +3i}.

<u>Resolução:</u> Alternativa C

Fazendo $z = x + yi$ temos:

$$A = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, (x+2)^2 + (y-3)^2 < 19\right\}$$

Logo A é a região interior a circunferência de centro $(-2,3)$ e raio $\sqrt{19}$.

$$B = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, x^2 + (y+1)^2 < \frac{49}{4}\right\}$$

Logo B é a região interior à circunferência de centro $(0,-1)$ e raio $\frac{7}{2}$.

O conjunto C será composto pelos números Z_1 e Z_2, solução da equação.

$$Z^2 + 6Z + 10 = 0$$
$$Z_1 = \frac{-6 - \sqrt{36-40}}{2} = -3 - i$$
$$Z_2 = \frac{-6 - \sqrt{36-40}}{2} = -3 + i$$

$Z_1 \in B$, pois a distância do centro da circunferência que delimita a região B à Z_1 é menor que $\frac{7}{2}$.

$Z_2 \notin B$, pois a distância do centro da circunferência que delimita a região B à Z_2 é menor que $\frac{7}{2}$.

$Z_2 \in A$, pois a distância do centro da circunferência que delimita a região A à Z_2 é menor que $\sqrt{19}$.

Logo $(A / B) \cap C = Z_2 = -3 + i$

QUESTÃO 3

Se $z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de 2 arcsen (Re(z)) + 5 arctg (2 Im(z)) é igual a

a) $-\frac{2\pi}{3}$.

b) $-\frac{\pi}{3}$.

c) $\frac{2\pi}{3}$.

d) $\frac{4\pi}{3}$.

e) $\frac{5\pi}{3}$.

<u>Resolução:</u> Alternativa D

$$z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{10}, \text{ sendo } \begin{array}{l} Z_1 = 1+\sqrt{3}i \\ Z_2 = 1-\sqrt{3}i \end{array}$$

Colocando Z_1 e Z_2 na forma polar obtemos: $Z_1 = 2\cdot cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$Z_2 = 2\cdot cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

Logo:

$$Z = \left(\frac{2\cdot cis\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\cdot cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)}\right)^{10} = \left[cis\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{10}$$

$$Z = \left[cis\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]^{10} = cis\left(-\frac{40\pi}{3}\right) = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$Z = \cos\frac{2\pi}{3} + i sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Re}(Z) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Im}(Z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo na expressão apresentada:

$$2arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) + 5arctg\left(\sqrt{3}\right)$$

$$2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 5\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

QUESTÃO 4

Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r: 3x+4y-4=0$ e $s: 3x+4y-19=0$. A área do cíclo determinado por C é igual a

a) $\frac{5\pi}{7}$.

b) $\frac{4\pi}{5}$.

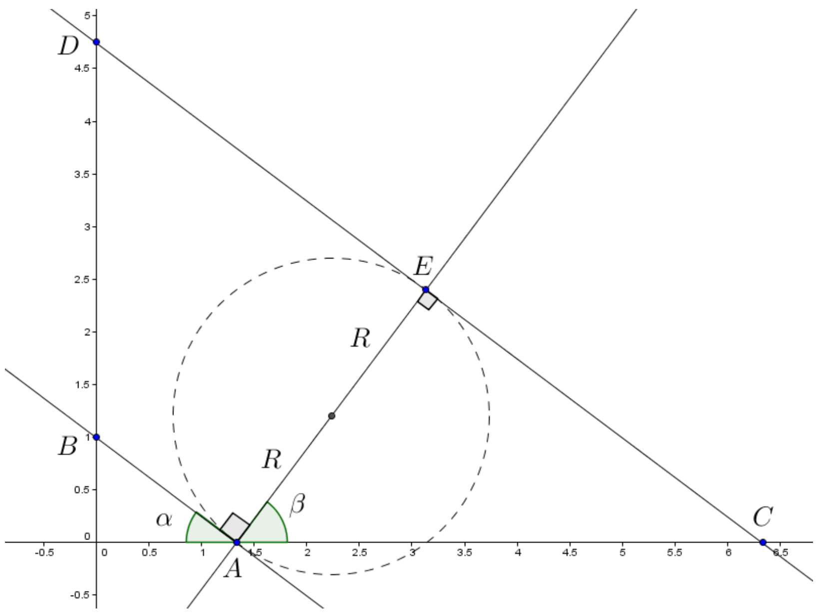
c) $\frac{3\pi}{2}$.

d) $\frac{8\pi}{3}$.

e) $\frac{9\pi}{4}$.

<u>Resolução:</u> Alternativa E

Como r//s, a distância entre as retas corresponde ao diâmetro ($2R$) da circunferência, conforme a figura abaixo, onde A, B, C e D representam os pontos de intersecção das retas r e s com os eixos coordenados:



Sendo O a origem do plano cartesiano, por Pitágoras em ABO, temos que $\overline{AB}=\frac{5}{3}$. Daí, $sen(\alpha)=\frac{3}{5}$.

Como α e β são ângulos complementares, então $sen(\alpha)=\cos(\beta)=\frac{3}{5}$. Seja E o ponto de intersecção de uma reta perpendicular à r, passando por A, com a reta s, temos no triângulo retângulo ACE que $\cos(\beta)=\frac{2R}{5}=\frac{3}{5}$.

Assim, $R=\frac{3}{2}$ e a área do círculo é igual a $\frac{9\pi}{4}$.

QUESTÃO 5

Seja (a_1, a_2, a_3, ...) a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.
II. a_7 é um número primo.
III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

<u>Resolução:</u> Alternativa D

$(a_n) = (1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots)$

I. Falso

Utilizando o que será justificado no item III, temos que se $p \equiv 0 (\text{mod}\,3)$, então $a_p \equiv 0 (\text{mod}\,2)$. Caso contrário, teremos $a_p \equiv 1 (\text{mod}\,2)$.

i) Se $p \equiv 0 (\text{mod}\,3)$:

$a_p \equiv 0 (\text{mod}\,2)$, $a_{p+1} \equiv 1 (\text{mod}\,2)$ e $a_{p+2} \equiv 1 (\text{mod}\,2)$. Assim, estes três termos não formam uma P.G., uma vez que $(a_{p+1})^2 \equiv 1 (\text{mod}\,2)$ e $a_p \cdot a_{p+2} \equiv 0 (\text{mod}\,2)$.

ii) Analogamente, se $p+1 \equiv 0 (\text{mod}\,3)$:

$a_p \equiv 1 (\text{mod}\,2)$, $a_{p+1} \equiv 0 (\text{mod}\,2)$ e $a_{p+2} \equiv 1 (\text{mod}\,2)$. Assim, estes três termos não formam uma P.G., uma vez que $(a_{p+1})^2 \equiv 0 (\text{mod}\,2)$ e $a_p \cdot a_{p+2} \equiv 1 (\text{mod}\,2)$.

iii) Por fim, se $p+2 \equiv 0 (\text{mod}\,3)$:

$a_p \equiv 1 (\text{mod}\,2)$, $a_{p+1} \equiv 1 (\text{mod}\,2)$ e $a_{p+2} \equiv 0 (\text{mod}\,2)$. Assim, estes três termos não formam uma P.G., uma vez que $(a_{p+1})^2 \equiv 1 (\text{mod}\,2)$ e $a_p \cdot a_{p+2} \equiv 0 (\text{mod}\,2)$.

II. Verdadeiro

$a_7 = 13$

III. Verdadeiro

Como $a_1 \equiv 1 (\text{mod}\,2)$ e $a_2 \equiv 1 (\text{mod}\,2)$, temos

$$a_3 = a_2 + a_1 \equiv 0 (\text{mod}\,2)$$
$$a_4 = a_3 + a_2 \equiv 1 (\text{mod}\,2)$$
$$a_5 = a_4 + a_3 \equiv 1 (\text{mod}\,2)$$
$$a_6 = a_5 + a_4 \equiv 0 (\text{mod}\,2)$$

Como temos um ciclo a cada três termos, se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

QUESTÃO 6

Considere a equação $\frac{a}{1-x^2}-\frac{b}{x-\frac{1}{2}}=5$, com *a* e *b* números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 0$ é uma solução da equação.
II. Se *x* é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -1 \ e \ \ x \neq 1$..
III. $x = \frac{2}{3}$ não porte ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s):

a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

Resolução: Alternativa E

I - (V) Substituindo a=1 e b=2

$$\frac{1}{1-x^2}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}=5$$

$$\frac{1}{1-x^2}-\frac{4}{2x-1}=5$$

Substituindo x por zero:

$\frac{1}{1}-\frac{4}{-1}=5$ logo $x=0$ é solução.

II - (V) $\frac{a}{1-x^2}-\frac{b}{x-\frac{1}{2}}=5$

Condições de existência: $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$ e $x-\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

III - (V) Substituindo por $x=\frac{2}{3}$

$$\frac{a}{1-\frac{4}{9}}-\frac{b}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=5$$

$$\frac{9a}{5}-6b=5$$

$$9a-30b=25$$

$3(3a-10b)=25$, absurdo!

QUESTÃO 7

Considere o polinômio *p* dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que *p* admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de *p*, então o valor de $b - a$ é igual a

a) - 36.
b) - 12.
c) 6.
d) 12.
e) 24.

Resolução: Alternativa B

Seja k a raiz dupla, com $k \neq 2$ (se $k = 2$, teríamos 2 como raiz tripla, o que contradiz o enunciado), e sejam x_1, x_2 e x_3 as três raízes do polinômio p, temos $x_1 = x_2 = k$ e $x_3 = 2$.

Pelas relações de Girard:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-(-16)}{2} \Rightarrow 2k^2 = 8 \Rightarrow k = \pm 2.$$

Como já supomos que $k \neq 2$, temos $x_1 = x_2 = -2$ e $x_3 = 2$. Logo,

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = 4$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{b}{2} \Rightarrow b = -8$$

Logo, $b - a = -12$.

QUESTÃO 8

Seja p o olinomio dado por $p(x)=\sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{R}$, $j=0,1,...,15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é raiz de p e que p(2)=1, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x)=x^3-2x^2+x-2$, é igual a

a) $\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5}x^2+\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{5}$

Resolução: Alternativa B

Temos que:

i) $p(i)=0$. Como todos os coeficientes são reais, temos também que $p(-i)=0$;

ii) $p(2)=1$.

Sejam $D(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto, respectivamente, na divisão de $p(x)$ por $q(x)$ e sabendo que $gr(R)\leq 2$, uma vez que $gr(q)=3$, temos

$$p(x)=D(x)\cdot q(x)+ax^2+bx+c$$

Note que $q(x)=(x-2)(x^2+1)$ e, com isso, $q(i)=q(-i)=q(2)=0$. Assim,

$$p(i)=0\Rightarrow -a+bi+c=0 \quad [I]$$

$$p(-i)=0\Rightarrow -a-bi+c=0 \quad [II]$$

$$p(2)=1\Rightarrow 4a+2b+c=1 \quad [III]$$

$$[I]-[II]:\ 2bi=0\Rightarrow b=0$$

$$[III]-[II]:\ 5a=1\Rightarrow a=\frac{1}{5}$$

Substituindo a e b em qualquer uma das equações, temos $c=\frac{1}{5}$. Logo, $R(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}$.

QUESTÃO 9

Considere todos os retângulos com os lados medindo $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e a. Dentre esses triângulos, o de maior hipotenusa tem seu menor ângulo, em radianos, igual a

a) $arctg\,\frac{\sqrt{3}}{4}$.

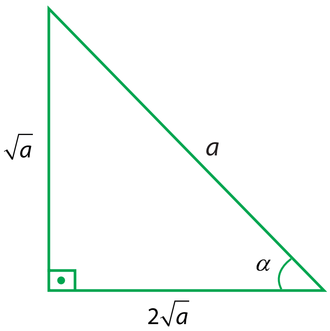
b) $arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $arctg\frac{1}{2}$

d) $arctg\frac{3}{5}$

e) $arctg\frac{4}{5}$

<u>Resolução</u>**:** Alternativa C



$$tg\alpha = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

QUESTÃO 10

Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2senx - \cos x = 1$ são

a) $arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

b) $arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

c) $arcsen\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

d) $arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

e) $arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π

__Resolução__: Alternativa A

$$2senx - \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = 2senx - 1 \quad (*)$$

Pela Relação Fundamental da Trigonometria,

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1 \;\Rightarrow 5sen^2 x - 4senx + 1 = 1 \;\Rightarrow sen^2 x = \frac{4}{5} senx$$

A primeira solução ocorre para $senx = 0$. Neste caso, temos por (*) que $\cos x = -1$ e $x = \pi$.

Se $senx \neq 0$, então $senx = \frac{4}{5}$. Neste caso, temos por (*) que $\cos x = \frac{3}{5}$ e $x = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

QUESTÃO 11

Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{5}$ e $\cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}$.
Então, o menor valor de $\cos(\alpha+\beta)$ é igual a

a) -1.

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $-\frac{1}{2}$.

e) 0

<u>Resolução</u>: Alternativa B

Fazendo $x = \cos^2\frac{\alpha}{2}$ e $y = \cos^2\frac{\beta}{3}$ temos:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{4}$$
$$\cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\beta}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\alpha, \beta \in]0, 2\pi[$ temos

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{4}$$
$$\cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\beta}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\alpha+\beta \in]0, 2\pi[$

$\cos\frac{\beta}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois se $\frac{\beta}{3}$ não estiver no primeiro quadrante, $\alpha+\beta > 2\pi$

Logo $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow sen\beta = 1$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \text{ ou } \cos(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

QUESTÃO 12

Seja $A=(a_{ij})_{5\times5}$ a matriz tal que $a_{ij}=2^{i-1}(2j-1),\ 1\le i,\ j\le5$. Considere as afirmações

I. Os elementos de cada linha *i* formam uma pressão aritmética de razão 2*i*.
II. Os elementos de cada coluna *j* formam uma progressão geométrica de razão 2.
III. tr A é um número primo.
É (são) verdaderia(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas II e III.
d) apenas I e III.
e) I, II e III.

Resolução: Alternativa E

I. Verdadeira

$$Z_2=2\cdot cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$a_n=a_{in}=2^i\cdot(n-2^{i-1})$$

$$a_n=2^{i-1}+(n-1)\cdot2^i$$

Fazendo $a_1=2^{i-1}$ e $r=2^i$

$$a_n=a_1+(n-1)r, 1\le n\le5$$

2. Verdadeira

$$b_n=a_{nj}=2^{n-1}\cdot(2j-1)$$

Fazendo $b_1=2j-1$ e $q=2$

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}, 1\le n\le5$$

3. Verdadeira

$$a_{kk}=2^{k-1}(2k-1)$$

$$trA=a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}+a_{55}$$

$$trA=1+3\cdot2+5\cdot4+7\cdot8+9\cdot16$$

$trA=227$ (é primo)

QUESTÃO 13

Considere a Matriz M = $(m_{ij})_{2x2}$ tal que m_{ij} = j-i-1, i, j=1,2. Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 252$$

Então o valor de n é igual a

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 0 8.

<u>Resolução</u>: Alternativa C

Determinando-se a matriz M

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, em que $m_{ij} = j - i + 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = M^1 + M^2 + \cdots + M^n$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = \begin{pmatrix} n & n^2+n \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

Substituindo na expressão dada

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = \begin{pmatrix} n & n^2+n \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} n & n^2+n \\ 0 & n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n & n^2+n \\ 0 & n \end{pmatrix}\right] = 252$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 0 & n^2+n \\ n & 0 \end{pmatrix}\right] = 252$$

$$n(n^2+n) = 252$$

$n^3 + n^2 - 252 = 0$. Fazendo a pesquisa de raízes racionais, verifica-se que n=6.
Fazendo Briot-Ruffini para se obter as outras raízes.

$n^2 + 7n + 42 = 0$. Como o discriminante(Δ) dessa equação é negativo, as outras raízes não são reais.

QUESTÃO 14

Considere os pontos $A = (0,-1)$, $B = (0,5)$ e a reta r: $2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

I. $d(A, r) = d(B, r)$

II. B é simétrico de A em relação à reta r.

III. $\overline{AB}$ é a base de um triangulo equilátero ABC, de vértice $C = \left(-3\sqrt{3}, 2\right)$ ou $C = \left(3\sqrt{3}, 2\right)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

a) I.
b) II.
c) I e II.
d) I e III
e) II e III

<u>Resolução</u>: Alternativa D

l. verdadeira

$$d(A,\pi) = \left|\frac{2.(0) - 3.(-1) + 6}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}}\right| = 9/\sqrt{13}$$

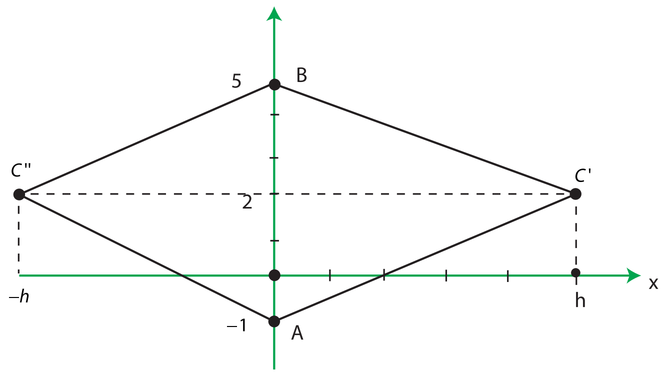
$$d(B,\pi) = \left|\frac{2.(0) - 3.(-1) + 6}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}}\right| = 9/\sqrt{13}$$

2. Falsa

$m\pi = \frac{2}{3}$mAB deveria ser : $-3/2$ mas A e B estão no eixo Y, ou seja, não existe mAB

$AB = \ell = 6$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} h = 3\sqrt{3}$



$C' = \left(3\sqrt{3}; 2\right)$ e $C''\left(-3\sqrt{3}; 2\right)$

QUESTÃO 15

Dados o ponto $A=\left(4,\dfrac{25}{6}\right)$ e a reta r: $3x+4y-12=0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\dfrac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triangulo são, respectivamente iguais a

a) $\dfrac{22}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$

b) $\dfrac{23}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$

c) $\dfrac{25}{3}$ e $\dfrac{31}{3}$

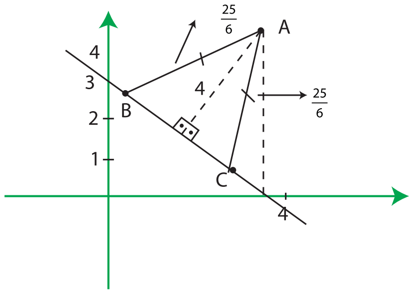
d) $\dfrac{25}{3}$ e $\dfrac{35}{3}$

e) $\dfrac{25}{3}$e $\dfrac{40}{3}$

<u>Resolução</u>: Alternativa E

$$A=\left(4,\frac{25}{6}\right)$$

$$r=3x+4y-12=0$$



$$h^2+b^2=\left(\frac{25}{6}\right)^2$$

$$h^2+b^2=\left(\frac{25}{6}\right)^2$$

$$\frac{100}{9}+b^2=\frac{625}{36}$$

$$b^2=\frac{625}{36}-\frac{100}{9}$$

$$b^2=\frac{625-400}{36}$$

$$b^2=\frac{225}{36}$$

$$b=\frac{15}{6}$$

$$A=\frac{2\cdot b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot\frac{15}{6}\cdot\frac{10}{3}}{2}$$

$$A=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}$$

$$2p=\frac{25}{6}+\frac{25}{6}+2\cdot b$$

$$2p=\frac{50}{6}+\frac{2\cdot 15}{6}$$

$$2p=\frac{80}{6}$$

$$2p=\frac{40}{3}$$

QUESTÃO 16

Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento l fixado, cujos externos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.

II. O lugar geométrico dos pontos (x,y) tais que $6x^3+x^2\cdot y-x\cdot y^2-4x^2-2xy=0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$

III. Os pontos $(2,3)$, $(4,-1)$ e $(3,1)$ pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)

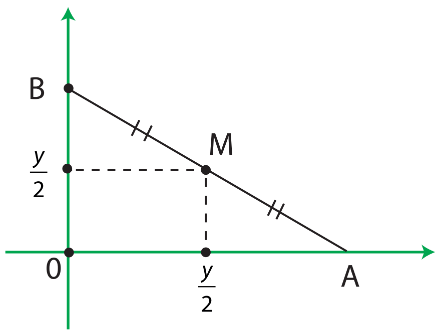
a) apenas I
b) apenas II
c) apenas III
d) I e II
e) I e III

<u>Resolução</u>: Alternativa A

I . verdadeira

$\overline{AB}=\ell$:

$x^2+y^2=\ell^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\ell^2-x^2}$



Assim, $M=\left(\frac{x}{2};\pm\frac{\sqrt{\ell^2-x^2}}{2}\right)$

dM, 0: distância do ponto médio M à origem O

$(d,\text{M},\text{O})^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{\ell^2-x^2}}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}+\frac{\ell^2-x^2}{4}$

$(d,\text{M},\text{O})^2=\left(\ell/2\right)^2 \Rightarrow dMO=\ell/2$

Logo, M equivale aos pontos $(x;y)$ tanto que $x^2+y^2=\left(\ell/2\right)^2$

II. falsa

$6x^3+x^2y-xy^2-4x^2-2xy=0$

Ou ainda

$x.(6x^2+xy-y^2-4x-2y)=0$

Nessa equação, qualquer ponto $(\text{O};\text{K})$ é solução, $\forall \text{K}\in\mathbb{R}$

III. Falsa

A=$(4;-1)$,B=$(3;-1)$,e C=$(2;3)$

MAB=-2=MBC $\Rightarrow$ A,B e C estão alinhados

QUESTÃO 17

Seja ABCD um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é

a) $\frac{21}{8}$

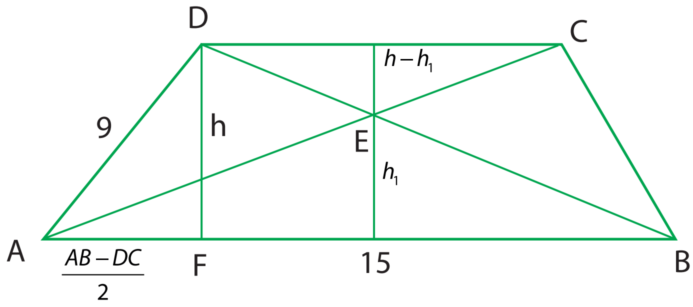
b) $\frac{27}{8}$

c) $\frac{35}{8}$

d) $\frac{37}{8}$

e) $\frac{45}{8}$

Resolução: Alternativa E



Por Pitágoras no Triangulo ADB temos:

$$DB^2=15^2-9^2 \Rightarrow DB=12$$

Usando uma relação métrica no triângulo retângulo ADB temos

$$15h=9\cdot 12 \Rightarrow h=\frac{36}{5}$$

Por Pitágoras no triângulo AFD temos

$$AF^2=9^2-\left(\frac{36}{5}\right)^2 \Rightarrow AF^2=\frac{9^2\cdot 25-36^2}{25}$$

$$AF=\frac{27}{5}$$

$$AF=\frac{AB-DC}{2} \Rightarrow \frac{27}{5}\cdot 2=15-DC$$

$$DC=\frac{15\cdot 5-54}{5}=\frac{21}{5}$$

Pela semelhança entre os triângulos DCE e ABE temos

$$\frac{h-h_1}{\frac{21}{5}}=\frac{h_1}{15} \Rightarrow \frac{36}{5}\cdot 15-15h_1=\frac{21}{5}\cdot h_1 \Rightarrow h_1=\frac{45}{8}$$

QUESTÃO 18

Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida da $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

a) 5.

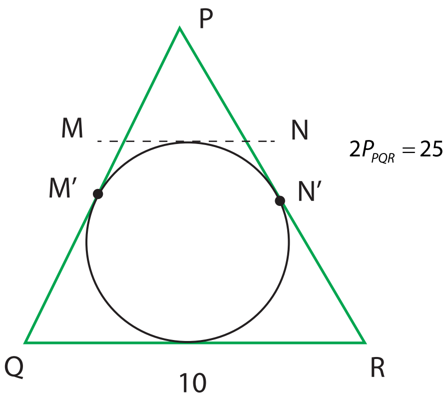
b) 6.

c) 8.

d) 10.

e)15.

<u>Resolução</u>: Alternativa A



$$2P_{PMN} = PN' + PM' = 2 \cdot PN' = 2 \cdot \left(\frac{25}{2} - 10\right) = 5$$

Resposta: A

QUESTÃO 19

Considere uma circunferência C, no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta $r : x - y = 0$. Sabendo-se que a potência do ponto O = (0, 0) em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a

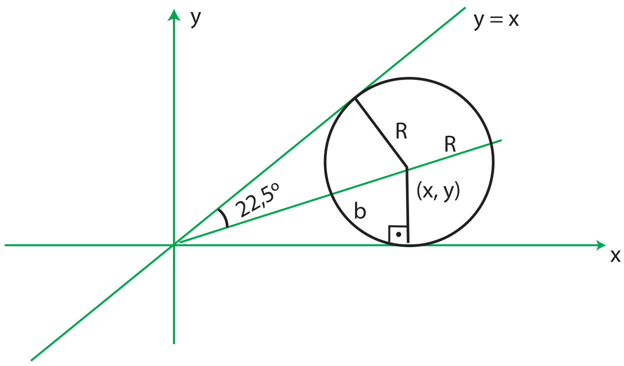
a) $\left(2, 2\sqrt{2}-2\right)$ e $2\sqrt{2}-2$

b) $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$

c) $\left(2, \sqrt{2}-1\right)$ e $\sqrt{2}-1$

d) $\left(2, 2-\sqrt{2}\right)$ e $2-\sqrt{2}$

e) $\left(2, 4\sqrt{2}-4\right)$ e $4\sqrt{2}-4$



__Resolução__: Alternativa A

Pelo enunciado

$$\left(b+R\right)\left(b-R\right)=4 \Leftrightarrow b^2-R^2=4$$

Da figura acima temos que:

$sen22,5° = \frac{R}{b} = \frac{\sqrt{1-\cos 45°}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$ logo $R = \frac{b\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ de (*) temos

$$b^2\left(1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)=4$$

$$b^2\left(2+\sqrt{2}\right)=16 \Rightarrow b=\frac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

E segue que

$$R=\frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=2\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$$

Para o centro temos que

$$sen22,5° = \frac{y}{b}$$

$$y = b.sen22,5° = \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 2\sqrt{2}-2$$

$$x = b.\cos 22,5 = .\frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\left(\frac{\sqrt{1-2\sqrt{2}}}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{2+2}}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = 2$$

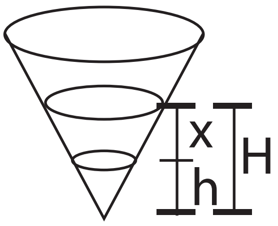
$$C\left(2, 2\sqrt{2}-2\right)$$

QUESTÃO 20

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista *h* do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2} - h$.
b) $\sqrt[3]{2} - 1$.
c) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$.
d) h.
e) $\frac{h}{2}$.

Resolução: Alternativa C



Volume inicial: v
Volume final: 2v
Temos que:

$$\left(\frac{H}{h}\right)^3 = \frac{2v}{v}$$

$$\frac{H}{h} = \sqrt[3]{2} \rightarrow H = h\sqrt[3]{2}$$

Logo $x = H - h = h(\sqrt[3]{2} - 1)$

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

QUESTÃO 21

Considere as funções f_1, f_2, $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2(x) = \frac{3}{2}|x+1|$ e $f(x)$ igual ao mairo valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:

a) Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.
b) O menor valor assumido pela função f.
c) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

Resolução:

(a) $\frac{1}{2}|x| + 3 = \frac{3}{2}|x+1|$

$|x| + 6 = 3|x+1|$

(i) $x \leq 1$

$-x + 6 = -3(x+1)$

$-x + 6 = -3x - 3$

$2x = -9$

$x = -\frac{9}{2} \Rightarrow s_1 = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$

(ii) $-1 \leq x < 0$

$-x + 6 = 3x + 3$

$-4x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

$s_2 = \varnothing$

(iii) $x \geq 0$

$x + 6 = 3x + 3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Resposta: $S = \left\{-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

(b) temos que

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } f_1(x) \geq f_2(x) \\ f_2(x), & \text{se } f_1(x) < f_2(x) \end{cases}$$

vamos resolver a desigualdade

$f_1(x) \geq f_2(x)$

$\frac{1}{2}|x| + 3 \geq \frac{3}{2}|x+1| \Rightarrow |x| + 6 \geq 3|x+1|$

(i) Se $x < -1$, temos

$-x + 6 \geq -3x - 3$

$2x \geq -9$

$x \geq -\frac{9}{2}$

Resposta: $-\frac{9}{2} \leq x < -1$

(ii) se $-1 \leq x < 0$, temos

$-x + 6 \geq 3x + 3$

$4x \leq 3$

$x \leq \frac{3}{4}$

$-1 \leq x < 0$

(iii) se $x \geq 0$

$x + 6 \geq 3x + 3$

$2x \leq 3$

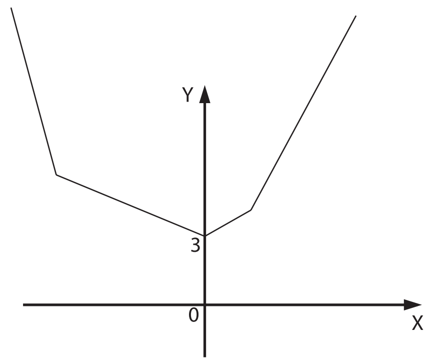
$x \leq \frac{3}{2}$

$0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

Reunindo as condições anteriores temos:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}, & \text{se } x < -\frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2}x + 3, & \text{se } -\frac{9}{2} \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}x + 3, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}, & \text{se } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Traçando o gráfico no plano temos:



Logo $f_{\min}(x) = 3$

(c) como $\frac{15}{4} < 5 < \frac{21}{4}$ temos que

$-\frac{1}{2}x + 3 = 5$ e $\frac{3x}{2} + \frac{3}{2} = 5$

$x = -4$ e $x = \frac{7}{3}$

QUESTÃO 22

Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem unia raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada uni dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinómio p.

(a)Seja $\alpha = a + bi$ tal que $p(\alpha) = 0$ e $|\alpha| = 1$ então sabemos que $\overline{\alpha} = a - bi$ é raiz e sendo $x \in \mathbb{R}$ a terceira raiz temos que

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} \cdot x = \frac{\beta}{18} \Rightarrow |\alpha|^2 \cdot x = \frac{\beta}{18} \Rightarrow x = \frac{\beta}{18}$$

Como $p(x) = 0$, temos que

$$\frac{18\beta^3}{18^3} + \beta \cdot \frac{\beta^2}{18^2} - \frac{7\beta}{18} - \beta = 0$$
$$\beta^3 + \beta^3 - 18 \cdot 7\beta - 18^2 \cdot \beta = 0$$
$$2\beta^3 - 18 \cdot 25\beta = 0$$
$$\beta\left(2\beta^2 - 18 \cdot 25\right) = 0$$
$$\beta = 0$$
$$\beta^2 = 9 \cdot 25 \Rightarrow \beta = \pm 15$$

Se $\beta = 0$, então $p(z) = 18z^3 - 7z$ e todas as raízes são reais, logo $\beta = \pm 15$.

<u>Resposta</u> $\beta = \pm 15$

(b) Se $\beta = \pm 15$

$p(z) = 18z^3 + 15z^2 - 7z - 15$ ou $p(z) = 18z^3 - 15z^2 - 7z + 15$

1º Caso) $p(z) = 18z^3 + 15z^2 - 7z - 15$

$$p(z) = \left(z - \frac{5}{6}\right)\left(18z^2 + 30z + 18\right) = 0$$

$p(z) = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{5}{6}$ ou $18z^2 + 30z + 18 = 0$

$$3z^2 + 5z + 3 = 0 \Rightarrow z_{2,3} = \frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{6}$$

2º Caso) $p(z) = 18z^3 - 15z^2 - 7z + 15$

$$p(z) = \left(z + \frac{5}{6}\right)\left(18z^2 - 30z + 18\right) = 0$$

$p(z) = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{5}{6}$ ou $18z^2 - 30z + 18 = 0$

Logo $3z^2 - 5z + 3 = 0$

$$z_{2,3} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}$$

Resposta:

Se $\beta = 15$ as raízes são $\left\{\frac{5}{6}, \frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{6}\right\}$ e se $\beta = -15$ as raízes são $\left\{-\frac{5}{6}, \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}\right\}$

QUESTÃO 23

Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

(i) B, C, D, E são dois a dois distintos;

(ii) os números 1, B, C, os núnwros 1, C, E estão, nesta ordem em progressão aritmética;

(iii) os números B, C, D, E estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

<u>Resolução</u>:

(i) $PA_1: (1, B, C)$
$PA_2: (1, C, E)$

(ii) $PG(B, C, D, E)$

de (i) $\begin{matrix} 2B = 1 + C \\ 2C = 1 + E \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C = 2B - 1 \\ E = 2C - 1 = 4B - 3 \end{matrix}$

de (iii)

$D^2 = CE$ e $C^2 = BD$, ou seja, $D = \frac{C^2}{B}$, $B \neq 0$

logo $\frac{C^4}{B^2} = CE \Rightarrow C^3 = B^2E$

temos que

$(2B-1)^3 = B^2.(4B-3)$

$8B^3 - 12B^2 + 6B - 1 = 4B^3 - 3B^2$

$4B^3 - 9B^2 + 6B - 1 = 0$, 1é raiz dupla desta equação portanto, $4B^3 - 9B^2 + 6B - 1 = (B-1)^2(4B-1) = 0 \Rightarrow B = 1$ ou $B = \frac{1}{4}$.

Se $B = 1$, temos que $C = 1$, o que contradiz o item (i).

Se $B = \frac{1}{4}$, então $C = -\frac{1}{2}, D = 1$ e $E = -2$

Resposta: $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = 1$ e $E = -2$

QUESTÃO 24

Seja $M \subset \mathbb{R}$ dado por $M = \{|z^2 + az - 1| : z \in \mathbb{C} \text{ e } |z| = 1\}$, com $a \in \mathbb{R}$. Determine o maior elemento de M em função de a.

Resolução:

$M = \left\{ |z^2 + az - 1| : z \in \mathbb{C} \text{ e } |z| = 1 \right\}$

Seja $z = cis\theta$ e $\rho = |z^2 + az - 1|$, temos que $\rho = |cis2\theta + acis\theta - 1| = \sqrt{(\cos 2\theta + acos\theta - 1)^2 + (sen2\theta + asen\theta - 1)^2}$

$$\rho = \sqrt{\cos^2 2\theta + a^2 cos^2\theta + 1 + 2a\cos 2\theta \cos\theta - 2\cos 2\theta - 2a\cos\theta + sen^2 2\theta + a^2 \cdot sen\theta^2 + 2 \cdot sen2\theta \cdot sen\theta}$$

$$\rho = \sqrt{1 + a^2 + 1 + 2a\cos\theta - 2\cos 2\theta - 2a\cos\theta}$$

$$\rho = \sqrt{2 + a^2 - 2\cos(2\theta)}$$

Devemos ter

$$2 + a^2 - 2\cos(2\theta) \geq 0 \ \Rightarrow \ \cos(2\theta) \leq \frac{2 + a^2}{2}$$

Como $\dfrac{2 + a^2}{2} \geq -1$, temos que máximo é dado por $\rho_{max} = \sqrt{2 + a^2 + 2} = \sqrt{a^2 + 4}$

Resposta: $\sqrt{a^2 + 4}$

QUESTÃO 25

Seja S o conjunto de todos o polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.
b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

<u>Resolução</u>:

(a) $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ onde $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$ é uma permutação de $(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1)$, logo o total de polinômios que pertencem a S é igual a

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4}{2} = 10$$

(b) se -1 é raiz de $p(x)$, então $p(-1) = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_4 + a_2 + a_0 - (a_3 + a_2) = 0$

Temos por tanto que a_3 e a_2 não pode ser iguais a 1 simultaneamente e também não podemos ter, $a_3 = 2$ e $a_2 = 1$, pois nesse caso $a_4 + a_2 + a_0 = 5$;

Logo o subconjunto de S dos polinômios que têm uma raiz igua a -1 é

$\{2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2\}$, $\{2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2\}$, $\{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2\}$

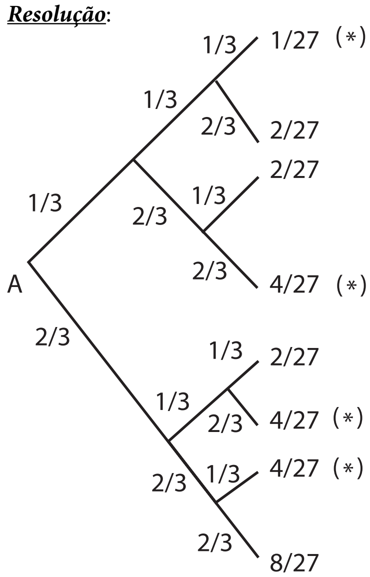
Resposta: a) 10

b) $\{2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2\}$, $\{2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2\}$, $\{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2\}$

QUESTÃO 26

Três pessoas, aqui designadas por A, B e C, realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal + ou sinal de - , passando em seguida a B, que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C. Este, por sua vez, também de opta por manter ou troca o sinal do cartão. Sendo 1/3 a probabilidade de A escrever o sinal + e de 2/3 as respectivas probabilidades de B e C trocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal + sabendo-se ter sido este sinal ao término do experimento.

<u>Resolução</u>:



A probabilidade de A ter escrito o sinal (+) no cartão, dado que ao final do experimento o sinal era (+) é:

$$p = \frac{\frac{1}{27} + \frac{4}{27}}{\frac{1}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{24}} = \frac{5}{13}$$

Resposta: $\frac{5}{13}$

QUESTÃO

27

Seja *n* um inteiro positivo tal que $sen\frac{\pi}{2n}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine *n.*
b) Determine $sen\frac{\pi}{24}$.

Resolução:

a) Observe que:

(i) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$, de fato

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{6}{16}+\frac{2}{16}-\frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{16}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(ii) $sen15^\circ=sen(45^\circ-30^\circ)=sen45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\cdot sen30^\circ$

$$sen15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Portanto, $sen\frac{\pi}{2n}=sen\frac{\pi}{12}$

a) $\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{12}+2k\pi\Rightarrow 6=n+24kn\Rightarrow n(1+24k)=6\Rightarrow n=6$

Ou

$$\frac{\pi}{2n}=\frac{11\pi}{12}+2k\pi\Rightarrow n\notin\mathbb{Z}$$

Resposta: n=6

b)

$$sen\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{1-sen^2\frac{\pi}{12}}=\sqrt{1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

Logo

$$sen\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$$

QUESTÃO 28

Sejam α e β número reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados

$$S\begin{cases}2x+by=\alpha\\ cx+y=\beta\end{cases}\quad T\begin{cases}cx+3y=\alpha\\ 4x+dy=\beta\end{cases}$$

Resolução:

$$S:\begin{cases}2x+y=\alpha\\ cx+y=\beta\end{cases}\quad \text{e} \quad T:\begin{cases}cx+3y=\alpha\\ 4x+dy=\beta\end{cases}$$

Escalonando os dois sistemas temos

$$\begin{cases}2x+by=\alpha\\ 0x+\left(1-\frac{bc}{2}\right)y=\beta-\frac{\alpha c}{2}\end{cases}\quad \text{e} \quad \begin{cases}4x+dy=\beta\\ 0x+\left(3-\frac{dc}{4}\right)y=\alpha-\frac{\beta c}{4}\end{cases}$$

Para que os sistemas sejam compatíveis e indeterminados devemos ter

$$1-\frac{bc}{2}=0 \quad (1)$$

$$\beta-\frac{\alpha c}{2}=0 \quad (2)$$

$$3-\frac{dc}{4}=0 \quad (3)$$

$$\alpha-\frac{\beta c}{4}=0 \quad (4)$$

De (2) e (4) temos:

$\alpha c=2\beta$ e $4\alpha=\beta c$, daí segue que $4\alpha=\frac{\alpha c}{2}\cdot c\Rightarrow c^2=8\Rightarrow c=\pm 2\sqrt{2}$

De (1):

$$bc=2\Rightarrow b=\frac{2}{\pm 2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De (3):

$$dc=12\Rightarrow d=\frac{12}{\pm 2\sqrt{2}}=\pm 3\sqrt{2}$$

de (2) e (4) temos que

$$c=\frac{2\beta}{\alpha}=\frac{4\alpha}{\beta}\Rightarrow 2\beta-4\alpha^2=0$$

Resposta: $b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ c=\pm 2\sqrt{2},\ d=\pm 3\sqrt{2}$ e $2\beta^2-4\alpha^2=0$

QUESTÃO 29

Sabe-se quea equação $3x^2+5xy-2y^2-3x+8y=0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo θ. Determine a tangente de θ.

Resolução:

Reescrevendo temos que

$3x^2+5xy-2y^2-3x+8y-6$

Ou seja

$$x=\frac{3-5y\pm\sqrt{25y^2-30y+9+24y^2-96y+72}}{6}$$
$$x=\frac{3-5y\pm\sqrt{49y^2-126y+81}}{2.3}$$
$$x=\frac{3-5y\pm(7y-9)}{6}$$
$$r_1: 6x=3-5y+7y-9 \Rightarrow y=3x+3$$
$$r_2: 6x=3-5y-7y+9 \Rightarrow y=\frac{-x}{2}+1$$

Ângulo entre r_1 e r_2

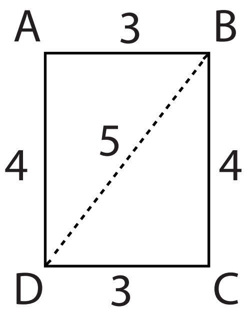
$$tg\theta=\left|\frac{3-(-1/2)}{1-3/2}\right|=\left|\frac{7/2}{-1/2}\right|=7$$

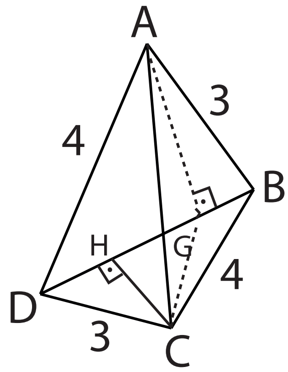
Resposta: 7

QUESTÃO 30

Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que estas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

Resolução:





Temos que duas arestas são iguais a 3 e outras duas iguais a 4, ou seja, $AB = DC = 3$ e $AD = BC = 4$. Temos, ainda que, mais uma aresta que coincide com a diagonal do retângulo, ou seja, $DB = \sqrt{9+16} = 5$.

Vamos calcular a aresta AC. Sejam G e H os pés das alturas dos triângulos ABC e BCD, baixadas dos vértices A e C, respectivamente, daí temos que $HG = DG - DH = \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = \frac{7}{5}$, segue portanto que $CG = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{193}}{5}$ e que $AC^2 = AG^2 + CG^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{193}}{5}\right)^2 = \frac{144+193}{25} = \frac{337}{5}$

$$\Rightarrow AC = \frac{\sqrt{337}}{5}$$

Resposta: $AB = DC = 3$, $AD = BC = 4$, $DB = 5$ e $AC = \frac{\sqrt{337}}{5}$

PÓDION

Índices de Aprovação dos nossos Alunos

Em 2009 / 2010
no ITA - **Instituto Tecnológico de Aeronáutica -**
o Pódion obteve a maior aprovação relativa do Brasil !
Foram 21% dos nossos alunos aprovados.

NOSSOS RESULTADOS

IME e ITA

2012 / 2013

Amanda de Oliveira Barros
Daniel Veloso Santana
Guilherme Gonzaga de Souza
Henrique Gasparini Fiúza do Nascimento
Johnatan Alves de Oliveira
Juliano Garcia do Carmo Ribeiro
Júlio César Prado Soares
Luis Felipe Soares e Silva
Maria Luiza Vieira Arruda
Nicholas Yukio
Paulo Henrique Salgueiro
Rafael Bessoni
Ricardo Kazu Nakanishi

2011 / 2012

Guilherme Costa Guimarães Fernandes
Henrique Lima Neto Lacerda
Johnatan Alves De Oliveira
Juliano Garcia Do Carmo Ribeiro
Lucas Mendes Santos Silva
Marco César Prado Soares
Marcos Vinícius Gonçalves Nihari
Mateus Avelino Carvalho Dos Santos
Nicholas Yukio Menezes Sugimoto
Pedro Yuri Arbs Paiva
Rafael De Souza Cunha Bessoni
Tiago Oliveira Saldanha

2010 / 2011

Bruno Gomes De Lima
Felipe Vincent Yannik Romero Pereira
Felipe Mendes
Henrique Lopes Cavalcante
Marcos Vinícius Gonçalves Hihari
Nicholas Yukio Menezes Sugimoto
Pedro Loami Barbosa Dos Santos
Rafael Domingos De Mello Da Hora
Raphael Julio Barcelos

2010 / 2011
2º Lugar Geral do Brasil no IME

Felipe Vincent Yannil Romero Pereira

2011 / 2012
2º Lugar Geral do Brasil no IME

Guilherme Costa Guimarães Fernandes

Concurso de Bolsas
15 Dezembro
Inscrições abertas

Venha participar dessa galeria de vencedores!

PÓDION □aa □ke□ sa□aonde □ker c□egar□

ENDEREÇO:
SHCGN 712 CONJUNTO B
ASA NORTE - BRASÍLIA

TELEFONES:
(61) 3272-7740
(61) 3272-7742

WWW.PODION.COM.BR
PODION@PODION.COM.BR