Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 2

Equações e Sistemas de Equações

Neste 2^o texto de Álgebra, veremos diversos exemplos de equações e sistemas de equações em nível de problemas olímpicos do ensino fundamental.

Eles, possivelmente, servirão posteriormente de ideia para problemas mais difíceis.

1 Equações

Nossos três primeiros exemplos são de equações em que as soluções utilizam *produtos notáveis*, como aplicação do último assunto.

Problema 1. (EUA) Determine o número de soluções inteiras da equação $2^{2x} - 3^{2y} = 55$.

Solução. Inicialmente, observe que o lado esquerdo da equação é a diferença dos quadrados de 2^x e 3^y e, portanto, $(2^x + 3^y)(2^x - 3^y) = 55$. Veja que x e y são positivos (prove isso!), além de $(2^x + 3^y)$ e $(2^x - 3^y)$. Assim, as únicas possibilidades são

$$\begin{cases} 2^x + 3^y &= 55 \\ 2^x - 3^y &= 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2^x + 3^y &= 11 \\ 2^x - 3^y &= 5 \end{cases}.$$

Apenas o segundo sistema possui solução, que é $(x, y) = (3, 1)$.

Problema 2. Quantas soluções inteiras possui a equação $x^2 - 4xy + 6y^2 - 2x - 20y = 29$?

Solução. Os dois primeiros termos do lado esquerdo dão a pista do começo pois lembram o quadrado de $x - 2y$. Assim, vamos reescrever a equação da seguinte forma

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y + 1 + 2y^2 - 24y + 72 = 102$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 - 2(x - 2y) + 1 + 2(y^2 - 12y + 36) = 102$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y - 1)^2 + 2(y - 6)^2 = 102.$$

Assim, $x-2y-1$ é par e não maior que 10. Testanto $x-2y-1=0,\pm2,\pm4,\pm6,\pm8,\ \pm10$, obtemos $(y-6)^2=51,49,43,33,19,1$. Logo, as únicas soluções vêm de $x-2y-1=\pm2$ e $y-6=\pm7$ ou $x-2y-1=\pm10$ e $y-6=\pm1$. As soluções, portanto, são

$$(29,13);(25,13);(1,-1);(-3,-1);(25,7);(5,7);(21,5);(1,5).$$

Problema 3. (Romênia/2006) Encontre todos os números reais a e b satisfazendo

$$2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(b+1)(ab+1).$$

Solução. Utilizando produtos notáveis, a equação dada fica equivalente a

$$\begin{aligned} 2\left(a^2b^2+a^2+b^2+1\right) &= (ab+a+b+1)(ab+1)\\ \Leftrightarrow 2a^2b^2+2a^2+2b^2+2 &= a^2b^2+a^2b+ab^2++2ab+a+b+1\\ \Leftrightarrow a^2\left(b^2-b+2\right)-a\left(b^2+2b+1\right)+2b^2-b+1 &= 0, \end{aligned}$$

que pode ser considerada uma equação do 2^o grau em a cujo discriminante (Δ) é

$$\begin{aligned} \Delta &= (b+1)^4-4\left(b^2-b+2\right)\left(2b^2-b+1\right)\\ &= -7b^4+16b^3-18b^2+16b-7. \end{aligned}$$

Esse polinômio possui duas características interessantes. A primeira, que nós não utilizaremos, é que ele é um polinômio recíproco de 4^o grau e de 1^a espécie, pois a leitura de seus coeficientes da esquerda para direita coincide com a leitura feita da direita para a esquerda. A segunda é que $b=1$ é uma raiz já que o valor 1 zera o Δ. Isso nos leva a escrever

$$\begin{aligned} \Delta &= -7b^4+7b^3+9b^3-9b^2-9b^2+9b+7b-7\\ &= (b-1)\left(-7b^3+9b^2-9b+7\right). \end{aligned}$$

Novamente, o segundo fator desse último produto é um polinômio recíproco de 3^o grau, mas de 2^a espécie, já que as leituras dos coeficientes nos dois sentidos são simétricas. Além disso, $b=1$ é novamente uma raiz e, escrevendo $-7b^3+9b^2-9b+7=(b-1)\left(-7b^2+2b-7\right)$, obtemos

$$\Delta=(b-1)^2\left(-7b^2+2b-7\right).$$

O discriminante de $-7b^2+2b-7$ é negativo e, portanto, $-7b^2+2b-7<0,\forall b$. Como $(b-1)^2\geq0,\forall b$, segue que $\Delta\leq0,\forall b$. Para $a\in\mathbb{R}$, devemos ter $\Delta=0$ e, portanto, $b=1$ e $a=1$, que é a única solução.

Problema 4. (Croácia) Encontre todas as soluções inteiras da equação

$$4x+y+4\sqrt{xy}-28\sqrt{x}-14\sqrt{y}+48=0.$$

Problema 5. Mostre que $x^2-y^2=a^3$ sempre tem solução inteira (x,y), dado que $a\in\mathbb{Z}$.

Problema 6. Prove que se os coeficientes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c$ são inteiros ímpares, então as raízes da equação não podem ser números racionais.

Problema 7. Se x e y são reais tais que $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1$, prove que $x + y = 0$.

Problema 8. Para quais números reais a, b, c ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a + b + c \neq 0$) vale a igualdade $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$.

Problema 9. Sejam a, b, c, d inteiros distintos tais que a equação

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - 4 = 0$$

possui uma raiz inteira r. Mostre que $4r = a + b + c + d$.

Problema 10. (EUA) Se $1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$, determine o valor de $\dfrac{2}{x}$.

Problema 11. (EUA) Se $ab \neq 0$ e $|a| \neq |b|$, quantos valores distintos de x satisfazem a equação $\dfrac{x-a}{b} + \dfrac{x-b}{a} = \dfrac{b}{x-a} + \dfrac{a}{x-b}$?

2 Sistemas de equações

Vamos iniciar com um problema da 1^a fase do nível 2 da XXI OBM.

Problema 12. (OBM) Rafael tem $\frac{2}{3}$ da idade de Roberto e é 2 anos mais jovem que Reinaldo. A idade de Roberto representa $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo. Determine a soma em anos das idades dos três.

Solução. Sejam a, o, e as idades de Rafael, Roberto e Reinaldo, respectivamente. Assim, $a = \frac{2}{3}o$, $a = e - 2$ e $o = \frac{4}{3}e$. Daí, $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}e = e - 2$, o que dá $e = 18$. Portanto, $a = 16$, $o = 24$ e $a + o + e = 58$.

Problema 13. (EUA - Adaptado) Determine todas as triplas ordenadas distintas (x, y, z) de números inteiros satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ xy + 4yz + 2zx = 22 \\ xyz = 6 \end{cases}.$$

Solução. Podemos reescrever o sistema como $\begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ x \cdot 2y + 2y \cdot 4z + x \cdot 4z = 44 \\ 2y \cdot 4z = 48 \end{cases}.$

Fazendo $x = x', 2y = y'$ e $4z = z'$, chegamos a

$$\begin{cases} x' + y' + z' = 12 \\ x'y' + y'z' + x'z' = 44 \\ x'y'z' = 48 \end{cases}.$$

Assim, x', y', z' são raízes da equação $t^3 - 12t^2 + 44t - 48 = 0$ (verifique!), que possui 2 como raiz. Daí, podemos reescrevê-la como

$$t^3 - 2t^2 - 10t^2 + 20t + 24t - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(t^2 - 10t + 24\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t-4)(t-6) = 0,$$

que gera as soluções $2, 4, 6$. Assim, $4z = 4$ e $z = 1$. Além disso, $x = 2$ e $y = 3$ ou $x = 6$ e $y = 1$.

Problema 14. (URSS) Encontre todas as soluções inteiras (x, y, z, t) do sistema

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}.$$

Solução. Nas duas equações, aparecem as 4 letras exatamente uma vez. Assim, podemos elevá-las ao quadrado e somar o resultado da primeira com o dobro do da segunda, eliminando o produto $xyzt$

$$(xz)^2 + 2(xt)^2 + 4(yt)^2 + 2(yz)^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(z^2 + 2t^2\right) + 2y^2\left(z^2 + 2t^2\right) = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2y^2\right)\left(z^2 + 2t^2\right) = 11.$$

Temos as seguintes possibilidade $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z^2 + 2t^2 = 11 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 11 \\ z^2 + 2t^2 = 1 \end{cases}$.

No primeiro, temos $x^2 = 1, y^2 = 0$ e $z^2 = 9, t^2 = 1$. No segundo, $x^2 = 9, y^2 = 1$ e $z^2 = 1, t^2 = 0$. Substituindo nas equações iniciais, obtemos as soluções $(x, y, z, t) = (1, 0, 3, 1), (-1, 0, -3, -1), (3, 1, 1, 0), (-3, -1, -1, 0)$.

Problema 15. (Bielorrússia) Determine todas as soluções reais do sistema $(n \geq 2)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \frac{1}{x_n} \\ x_2 + x_3 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} \\ \vdots \quad = \quad \vdots \\ x_n + x_1 + \dots + x_{n-2} = \frac{1}{x_{n-1}} \end{cases}.$$

Solução. Inicialmente, observe que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_k + \frac{1}{x_k} (*), \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ e que todos os x_k são não-nulos. Tomando duas equações quaisquer, obtemos $x_i + \frac{1}{x_i} = x_j + \frac{1}{x_j}$, cujas soluções são $x_i = x_j$ ou $x_i = \frac{1}{x_j}$.

Supondo a segunda possibilidade e substituindo na equação do sistema original em que o lado direito é $\frac{1}{x_j}$, chegamos a $x_1 + ... + \hat{x}_i + ... + \hat{x}_j + ... + x_n = 0$ (a notação $\hat{x}_i$ significa que x_i foi suprimido da soma), o que é impossível já que (*) garante que os x_k são todos positivos ou todos negativos.

Assim, só nos resta a opção em que todos os x_k são iguais, digamos a α. Substituindo em qualquer uma das equações, obtemos $(n-1)\alpha = \frac{1}{\alpha}$, ou seja, $x_k = \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \forall k$ ou $x_k = -\frac{1}{\sqrt{n-1}}, \forall k$.

Problema 16. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x^2 & - & y^2 & - & z^2 & = & 2 \\ x & - & 3y^2 & + & z & = & 0 \end{cases}.$$

Problema 17. (IMTS) O conjunto S é formado por 5 inteiros. Se os elementos de S são somados aos pares, obtemos $1967, 1972, 1973, 1974, 1975, 1980, 1983, 1984, 1989, 1991$. Quais são os elementos de S?

Problema 18. (EUA) Resolva o sitema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 24 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 48 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 96 \end{cases}.$$

Problema 19. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} & = & y \\ y + \frac{1}{y} & = & z \\ z + \frac{1}{z} & = & x \end{cases}$$

não possui soluções reais (x, y, z).

Problema 20. Mostre que a única solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & \vdots & & & = & \vdots \\ x_{98} & + & x_{99} & + & x_{100} & = & 0 \\ x_{99} & + & x_{100} & + & x_1 & = & 0 \\ x_{100} & + & x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

é $x_1 = x_2 = ... = x_{99} = x_{100} = 0$.

Problema 21. (EUA) Quatro inteiros positivos a, b, c, d têm produto igual a 8! e satisfazem

$$\begin{cases} ab + a + b = 524 \\ bc + b + c = 146 \\ cd + c + d = 104 \end{cases}$$

Quanto vale $a - d$?

Problema 22. (EUA) Quantas triplas ordenadas (x, y, z) de inteiros satisfazem o sistema de equações abaixo?

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 - z^2 = 31 \\ -x^2 + 6yz + 2z^2 = 44 \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 \end{cases}$$

Problema 23. (Iberoamericana) Ache todas a triplas de números reais (x, y, z) tais que

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1 \end{cases}$$

Problema 24. (Romênia) Os números reais não nulos x, y, z, t verificam as seguintes equações

$$\begin{cases} x + y + z = t \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1000^3 \end{cases}$$

Determine o valor da soma $x + y + z + t$.

Problema 25. (OCM) Determine $a + b + c + d$, se

$$\begin{cases} 6a + 2b = 3840 \\ 6c + 3d = 4410 \\ a + 3b + 2d = 3080 \end{cases}.$$

Problema 26. (OBM/IME) Sejam a, b, c e k números reais diferentes de zero satisfazendo as relações $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Qual é o número de possíveis valores que k pode assumir?

Problema 27. (OBM) Determine o número de soluções inteiras e positivas do sistema

$$\begin{cases} a + b = c^2 \\ a + b + c = 30 \end{cases}$$

Problema 28. (OBM) As letras O, B, M representam números inteiros. Se $O \times B \times M = 240$, $O \times B + M = 46$ e $O + B \times M = 64$, quanto vale $O + B + M$?

Problema 29. (OBM) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a(b+c) = 152$, $b(c+a) = 162$ e $c(a+b) = 170$. Determine o valor de abc.

Problema 30. (OBM) Quantos pares ordenados (x, y) de números reais satisfazem a equação $\left(x - y^2\right)^2 + (x - y - 2)^2 = 0$.

Problema 31. (OBM) Os inteiros $0 < x < y < z < w < t$ são tais que $w = z(x + y)$ e $t = w(y + z)$. Sendo $w = 9$, determine o valor de t.

Problema 32. (EUA) Se x e y são números reais não-nulos tais que $x = 1 + \frac{1}{y}$ e $y = 1 + \frac{1}{x}$, então y é igual a:

a) $x - 1$

b) $1 - x$

c) $1 + x$

d) $-x$

e) x

Dicas

4. Fatore o lado esquerdo da equação. Comece escrevendo a soma dos 3 primeiros termos como o quadrado da soma de dois termos.

5. Observe que o problema não pede **todas** as soluções dessa equação. Assim, fatore o lado esquerdo e faça $x+y=a^2$ e $x-y=a$.

6. Use a definição: se $x \in \mathbb{Q}$, então existem $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ tais que $x = \frac{p}{q}$. Se for necessário, acrescente que x e y são primos entre si. Com essa última observação, as paridades de p e q só não podem ser ambas pares. Utilize o fato de que 0 é par para chegar a contradições em todos os casos.

7. Passe o primeiro fator para o lado direito e racionalize (ou então, racionalize mesmo na equação inicial). Depois, faça o mesmo com o segundo fator.

8. Para 'equilibrar' a equação, passe $\frac{1}{c}$ para o lado direito. Em seguida, reduza a um denominador comum em cada lado. Analise, em seguida, as possibilidades de os números serem ou não iguais a 0.

9. Use a definição: se r é raiz da equação em x, então substituindo x pelo valor r a equação fica verdadeira. Depois, escreva 4 como produto de 4 números inteiros distintos.

16. Combine as equações 1 e 3.

18. Some todas as equações, que nos dará a soma de todas os x_is. Depois, subtraia cada uma desse resultado.

19. Some todas as equações.

20. Subtraia as equações aos pares.

21. Some 1 a cada membro de cada equação e use a fatoração $xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$.

22. Some todas as equações e perceba soma de quadrados.

23. Subtraia as equações aos pares.

24. Veja o problema 8.

26. Escreva $a=k(b+c), b=k(c+a), c=k(a+b)$ e some todas as equações em seguida.

28. Multiplique a segunda equação por M e a terceira por O.

29. Some todas as equações.

30. Se a soma dos quadrados de dois números reais é 0, então os dois números são iguais a 0.

Respostas

4. $(0,36),(1,16),(4,4),(9,0),(0,64),(1,36),(4,16),(9,4),(16,0)$
8. $a=-b$ ou $b=-c$ ou $c=-a$
9. 1
10. 3
16. $(2,-1,1),\left(\frac{19}{12},\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)$
17. $S=\{983,984,989,991,1000\}$
18. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-25,-19,-7,17,65)$
21. 10
22. 0
23. $(-1,-1,-1),(1,-1,1)$
24. 2000
25. 1985
26. $2\left(\frac{1}{2};-1\right)$
27. 24
28. 20
29. 720
30. 2
31. 45
32. e