Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Aula 5

Prof. Marcelo Mendes

Recorrências - Parte II

Na aula 3, falamos de uma sequência famosa, a *Sequência de Fibonacci*, cuja definição é a seguinte: $F_1 = F_2 = 1$ e, para $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Essa fórmula é uma recorrência linear de ordem 2. Um de nossos objetivos neste 5^o texto é mostrar que a fórmula explícita para seus termos é

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Surpreendente, não é mesmo? Imaginar que, substituindo n por $1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$ na fórmula acima, acharemos exatamente os termos $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$, e nenhum $\sqrt{5}$ sobra, é realmente muito belo.

Em geral, nesta aula, trataremos equações de recorrência lineares que dependem somente dos dois termos anteriores. Inicialmente, vamos estudar o caso em que as raízes da *equação característica* (que definiremos no texto) são distintas.

1 Um Exemplo para Organizar as Ideias

Vamos resolver a recorrência $a_1 = 1, a_2 = 3$ e, para $n \geq 3$,

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Podemos escrever $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$ e, em seguida, multiplicar telescopicamente várias delas

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= 2(a_{n-1} - a_{n-2}) \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= 2(a_{n-2} - a_{n-3}) \\
&\vdots \\
a_3 - a_2 &= 2(a_2 - a_1)
\end{aligned}$$

obtendo $a_n - a_{n-1} = 2^{n-2}(a_2 - a_1) = 2^{n-1}$.

Agora, somamos telescopicamente várias dessa última equação

$$\begin{gathered} a_n - a_{n-1} = 2^{n-1} \\ a_{n-1} - a_{n-2} = 2^{n-2} \\ \vdots \\ a_2 - a_1 = 2 \end{gathered}$$

e chegamos a $a_n - a_1 = 2 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1}$, ou seja, $a_n = 2^n - 1$.

Observe que, na primeira passagem, para transformar $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ em $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$, 'pedimos emprestado' a_{n-1} para o membro esquerdo. Essa operação gerou proporção entre os coeficientes dos termos dos dois membros (antes e depois da igualdade), permitiu colocar o fator de proporção 2 em evidência e a diferença que surgiu entre parênteses no membro direito ficou com o mesmo padrão da diferença no membro esquerdo, mas com índices reduzidos. Essa será nossa ideia para encontrar o termo geral da

2 Sequência de Fibonacci

Como já definimos anteriormente, seus termos são dados por $F_1 = F_2 = 1$ e, para $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Na verdade, os cálculos ficam mais interessantes escrevendo $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Seria difícil 'pedir emprestado' uma quantidade inteira desta vez pois há somente F_n no membro direito. Assim, vamos chamar de λ a quantidade que será passada para o membro esquerdo, ou seja,

$$F_{n+1} - \lambda F_n = (1 - \lambda)F_n + F_{n-1}.$$

Para repetirmos a ideia bem sucedida do primeiro exemplo, o valor de λ deve cumprir a relação de proporção

$$\frac{1}{-\lambda} = \frac{1-\lambda}{1},$$

ou seja,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

a qual chamaremos de *equação característica* da sequência de Fibonacci. Observe desde já que os coeficientes dessa equação são os mesmos da recorrência que define a sequência. Sendo λ_1 e λ_2 as raízes, aqui será mais relevante saber que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ (mas veja que ambas são reais e distintas) do que escrever seus valores pela fórmula de Baskara.

Agora, substituindo λ por λ_1, obtemos

$$F_{n+1} - \lambda_1 F_n = (1 - \lambda_1)F_n + F_{n-1},$$

ou seja,

$$F_{n+1} - \lambda_1 F_n = \lambda_2 \left(F_n - \lambda_1 F_{n-1}\right).$$

Assim, deixamos a equação pronta para escrevê-la várias vezes e fazer o produto telescópico

$$\begin{aligned} F_{n+1} - \lambda_1 F_n &= \lambda_2 \left(F_n - \lambda_1 F_{n-1}\right) \\ F_n - \lambda_1 F_{n-1} &= \lambda_2 \left(F_{n-1} - \lambda_1 F_{n-2}\right) \\ &\vdots \\ F_3 - \lambda_1 F_2 &= \lambda_2 \left(F_2 - \lambda_1 F_1\right), \end{aligned}$$

cujo resultado será

$$F_{n+1} - \lambda_1 F_n = \lambda_2^{n-1} \left(F_2 - \lambda_1 F_1\right) = \lambda_2^{n-1} \left(1 - \lambda_1\right) = \lambda_2^n.$$

Analogamente, substituindo λ por λ_2, temos

$$F_{n+1} - \lambda_2 F_n = \lambda_1^n.$$

A diferença entre esses 2 últimos resultados gera

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\right) F_n = \lambda_1^n - \lambda_2^n$$

e, portanto,

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

lembrando que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Substituindo os valores de λ_1 e λ_2, chegamos ao resultado desejado

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Mas há um pequeno problema. Esse método é bastante trabalhoso. A boa notícia é que podemos deixá-lo como uma quase demonstração e realizar, na prática, os seguintes passos:

1^o passo: Escreva a equação característica.

Basta copiar os mesmos coeficientes da equação de recorrência. Em seguida, calcule as raízes dessa equação.

2^o passo: Escreva o termo geral da recorrência.

O termo geral é dado por $F_n = A\lambda_1^n + B\lambda_1^n$ (essa fórmula pode ser encontrada refazendo os cálculos para a recorrência mais geralmente, ou seja, com a equação $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$).

As constantes A e B são dadas pelos valores dos termos iniciais. É interessante, para reduzir as contas, calcular o termo de ordem '0', que, no caso da sequência de Fibonacci, é $F_0 = 0$.

Vejamos como seria, então, a resolução na prática para encontrar o termo geral da sequência de Fibonacci.

Passo 1. Equação característica.

De $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$, obtemos $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Passo 2. Termos geral.

$F_n = A\lambda_1^n + B\lambda_1^n$. Com os valores 0 e 1 para n, obtemos

$$0 = A + B$$
$$1 = A\lambda_1 + B\lambda_2$$

cuja solução é $A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Problema 1. Um garoto tem n reais. Todo dia, ele realiza exatamente uma das seguintes compras: um bolo que custa R\$ $1,00$, um sorvete que custa R\$ $2,00$ ou um pastel que também custa R\$ $2,00$. De quantas maneiras o menino pode gastar seu dinheiro?

Solução. Seja a_n o número de maneiras de ele gastar os n reais.

Assim, para gastar os últimos reais, ou ele gasta $n-1$ reais primeiramente e compra um bolo no final, ou ele gasta $n-2$ reais inicialmente e, em seguida, compra um sorvete ou um pastel. Portanto, podemos escrever

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

com $a_1 = 1$ (só dá pra comprar 1 bolo) e $a_2 = 3$ (comprando 2 bolos ou 1 sorvete ou 1 pastel).

Agora, vamos resolver.

i) Equação característica: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, cujas raízes são 2 e -1.

ii) Termos geral: $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$. Podemos calcular a_0, que não faz sentido para o gasto do dinheiro, mas existe na sequência associada: $a_2 = a_1 + 2a_0 \Rightarrow a_0 = 1$. Agora, para $n = 0$ e $n = 1$

$$A + B = 1$$
$$2A - B = 1,$$

cuja solução é $A = \frac{2}{3}$ e $B = \frac{1}{3}$. Assim

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Problema 2. Determine o termo geral da sequência definida pela recorrência $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-1}$ para $n \geq 3$.

Problema 3. Determine o termo geral da sequência definida recorrentemente por $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ e, para $n \geq 3$, $a_n = \sqrt{5}a_{n-1} + a_{n-1}$.

Problema 4. Considere um retângulo $1 \times n$, que deve ser preenchido por dois tipos de retângulos menores 1×1 e 1×2. De quantas maneiras se pode fazer isso?

Problema 5. (OPM) Uma escada tem n degraus. Para subi-la, em cada passo, pode-se subir um ou dois degraus de cada vez. De quantos modos diferentes pode-se subir a escada?

Problema 6. Uma sequência de números a_k é definida por $a_0 = 0$ e $a_{k+1} = 3a_k + 1, k \geq 0$. Prove que a_{155} é divisível por 11.

Solução. Inicialmente, veja que essa recorrência não depende dos dois termos anteriores. A parcela 1 no membro da direita, na verdade, não é bem-vinda. Assim, de

$$a_{k+1} = 3a_k + 1$$
$$a_k = 3a_{k-1} + 1$$

obtemos $a_{k+1} - 4a_k + 3a_{k-1} = 0$. O termo geral dessa recorrência é $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ (a demonstração deixamos para o leitor).

Logo, $a_{155} = \dfrac{3^{155} - 1}{2}$. Para finalizar, deixo como sugestão que $3^5 - 1 = 242 = 11 \times 22$.

Problema 7. Seja $\{a_n\}$ uma sequência tal que $a_1 = \dfrac{21}{16}$ e $2a_n - 3a_{n-1} = \dfrac{3}{2^{n+1}}, n \geq 2$. Encontre o valor de a_2 e a lei de recorrência de cada termo em função dos dois termos imediatamente anteriores.

3 Recorrências e Equações do 2^o Grau

Como exemplo para organizar as ideias, vamos supor que α seja uma raiz da equação $x^2 + x - 1 = 0$. Assim

$$\alpha^2 = -\alpha + 1.$$

Daí,

$$\alpha^3 = -\alpha^2 + \alpha = 2\alpha - 1$$
$$\alpha^4 = 2\alpha^2 - \alpha = -3\alpha + 2$$
$$\alpha^5 = -3\alpha^2 + 2\alpha = 5\alpha - 3.$$

Será que existe um padrão entre os coeficientes que aparecem no lado direito de cada potência de α? Sim, existe! Na próxima aula, que será sobre *indução finita*, estaremos aptos a provar que

$$\alpha^n = (-1)^{n-1} F_n \alpha + (-1)^n F_{n-1},$$

sendo $\{F_n\}$ a sequência de Fibonacci.

Problema 8. Se α e β são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e $S_n = \alpha^n + \beta^n$, $n \in \mathbb{N}$, então mostre que $aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0$.

Solução. Como α e β são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, então

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$
$$a\beta^2 + b\beta + c = 0.$$

Daí, multiplicando por α^{n-1} e β^{n-1}, respectivamente, temos

$$a\alpha^{n+1} + b\alpha^n + c\alpha^{n-1} = 0$$
$$a\beta^{n+1} + b\beta^n + c\beta^{n-1} = 0.$$

Somando, obtemos

$$a\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) + b\left(\alpha^n + \beta^n\right) + c\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) = 0$$

ou seja,

$$aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0.$$

Problema 9. Seja α a maior raiz de $x^2 + x - 1 = 0$. Determine o valor de $\alpha^5 - 5\alpha$.

Problema 10. Sejam α e β as raízes de $x^2+x-1=0$. Sendo $a_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $n = 1, 2, 3, ...$ Determine os dois primeiros termos a_1 e a_2 dessa sequência e a lei de recorrência de cada termo em função dos dois termos imediatamente anteriores.

Dicas

2. Use a equação característica e encontre o termo geral seguindo o exemplo e a questão 1.

3. Use a equação característica e encontre o termo geral seguindo o exemplo e a questão 1.

4. Para finalizar, ou ele completa com um quadradinho 1×1 o retângulo $1 \times (n-1)$, que pode ser preenchido de a_{n-1} maneiras, ou ele completa com um retângulo 1×2 o retângulo $1 \times (n-2)$, que pode ser preenchido de a_{n-2} maneiras.

5. Para finalizar, ou ele sobe um degrau a partir do degrau $n-1$, que pode ser alcançado de a_{n-1} maneiras, ou ele sobe dois degraus a partir do degrau $n-2$, que pode ser alcançado de a_{n-2} maneiras.

7. Multiplique a equação de recorrência por 2 e subtraia de $2a_{n-1} - 3a_{n-2} = \dfrac{3}{2^n}$, que é a equação dada substituindo n por $n-1$.

10. Se a equação característica é $x^2 + x - 1 = 0$, então a equação de recorrência é $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}$.

Respostas

2. $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$

3. $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^n - \left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n$

4. Sendo a_n o número de maneiras, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

5. Sendo a_n o número de maneiras, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

7. $a_2 = \frac{69}{32}$ e $4a_n - 8a_{n-1} + 3a_{n-2}$

9. -3

10. $a_1 = 1$ e $a_2 = -1$; $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}$