Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 7

Indução - Parte II

Vamos iniciar esta aula com a resolução de alguns problemas propostos na aula anterior.

1 Resolução de Problemas da Última Aula

Problema 1. a) Verifique que a soma dos inversos de $2, 3$ e 6 é 1.
b) Prove que $\forall p$ natural, $p \geq 3$, existem p naturais 2 a 2 distintos $n_1, n_2, ..., n_p$ tais que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... + \frac{1}{n_p} = 1.$$

Solução. O primeiro item é imediato

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1.$$

A partir dessa soma, seguindo a dica dada na aula passada, obtemos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$$

simplesmente dividindo por 2 e somando $\frac{1}{2}$ a cada lado em seguida.

Agora vamos repetir a argumentação para o passo indutivo.

Suponhamos que já tenhamos k números naturais $2 \leq n_1 < n_2 < ... < n_k$ tais que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... + \frac{1}{n_k} = 1.$$

Daí

$$\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2} + ... + \frac{1}{2n_k} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2} + ... + \frac{1}{2n_k} = 1,$$

que é a soma dos inversos de $k+1$ números naturais distintos pois $2 < 4 \leq 2n_1 < 2n_2 < ... < 2n_k$.

Problema 2. Sabe-se que $a + \frac{1}{a}$ é um inteiro. Prove que todos os números da forma $a^n + \frac{1}{a^n}$, $n = 2, 3, ...$, também são inteiros.

Solução. Vejamos os casos iniciais para perceber como o padrão novamente é mantido para o passo indutivo. Para $n = 2$,

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - 2$$

que é claramente inteiro. A multiplicação $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right)$ no lugar de $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ é para preparar melhor para o passo indutivo. Para $n = 3$,

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

que também é inteiro. Pronto, agora estamos bem preparados para o passo indutivo, basta repetir o argumento para os casos pequenos. Suponha que $a^n + \frac{1}{a^n}$ seja inteiro para todo $k \leq n$ (indução forte). Em particular, $a^k + \frac{1}{a^k}$ e $a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}$ são inteiros. Logo

$$a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = \left(a^k + \frac{1}{a^k}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}\right)$$

também é inteiro.

Problema 3. Prove que

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + ... + 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) - 1,$$

$\forall n \geq 2$ natural.

Solução. Observe que podemos reescrever a soma da seguinte forma

$$1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + ... + n! \cdot n = (n+1)! - 1,$$

sendo $k! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k$ o *fatorial* do número inteiro não-negativo k $(0! = 1)$.

i) Para $n = 1$, $1! \cdot 1 = 2! - 1$.

ii) Suponha que a identidade seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + ... + k! \cdot k = (k+1)! - 1.$$

iii) Agora vejamos para $n = k+1$. Vamos somar $(k+1)! \cdot (k+1)$ a ambos os membros da suposta identidade do item ii):

$$1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + ... + k! \cdot k + (k+1)! \cdot (k+1)$$
$$= (k+1)! + (k+1)! \cdot (k+1) - 1 = (k+1)! \cdot (k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

2 Mais Problemas

Problema 4. (China) Há pelo menos quatro barras de chocolate em $n (n \geq 4)$ caixas. Camila pode, por vez, escolher 2 caixas, pegar uma barra de cada uma dessas caixas e colocá-las em uma terceira caixa. Determine se sempre é possível por todas as barras em uma mesma caixa.
Solução. Vejamos o caso inicial com 4 barras. As possibilidades iniciais de quantidades nas caixas são

$$1, 1, 1, 1, 0, 0, ...$$
$$1, 1, 2, 0, 0, 0, ...$$
$$1, 3, 0, 0, 0, 0, ...$$
$$2, 2, 0, 0, 0, 0, ...$$
$$4, 0, 0, 0, 0, 0, ...$$

Se ocorrer o caso na 1^a linha, então pegamos as barras nas caixas 3 e 4 e as passamos para a 5^a caixa. Assim, chegamos no caso da 2^a linha (não faz diferença se o 2 aparece na 3^a ou na 5^a posição).

Se ocorrer o caso da 2^a linha, só precisamos deslocar as barras das caixas 1 e 2 para a 3^a caixa e o objetivo está feito.

Se ocorrer o caso da 3^a linha, tomamos uma barra de cada caixa e as colocamos em uma outra caixa, gerando a configuração da 4^a linha.

Se ocorrer o caso da 4^a linha, tomamos uma barra de cada caixa e as colocamos em uma outra caixa, obtendo o caso da 2^a linha, que já mostrado como se finaliza.

Finalmente, se ocorrer o caso da 5^a linha, não há nada a fazer pois todas as barras já estão na mesma caixa.

Agora, vamos supor que seja possível deslocar k barras, dispostas de maneira aleatória nas n caixas, para uma única caixa.

Numa configuração com $k+1$ barras, separamos uma delas e realizamos o procedimento indutivo com as demais k barras. Ficamos, assim, com

$$k, 1, 0, 0, 0, 0, ...$$

Podemos deslocar todas as barras para uma única caixa a partir dos seguintes movimentos:

$$k, 1, 0, 0, ... \to k-1, 0, 2, 0, ...$$

$$k-2, 2, 1, 0, ... \to k-3, 2, 0, 2, ...$$

$$k-1, 1, 0, 1, ... \to k+1, 0, 0, 0, ...$$

e a indução foi finalizada.

Problema 5. Determine, com prova, se é possível arranjar os números $1, 2, 3, ..., 1000$ em uma fila de tal forma que a média de qualquer par de números distintos não esteja localizada entre esses dois números.
Solução. Vamos provar um resultado mais geral para os números $1, 2, 3, ..., 2^n$.

i) Vejamos alguns casos iniciais.
Se $n = 1$, os números são 1 e 2 e não há nada a fazer.
Se $n = 2$, podemos dispor os números na ordem 1, 3; 2, 4.
Para $n = 3$, dispomos os números na ordem 2, 6, 4, 8; 1, 5, 3, 7. Essa ordenação foi obtida a partir do caso $n = 2$ separando os pares dos ímpares da seguinte forma: duplicamos os números do caso $n = 2$ e obtemos 2, 6, 4, 8. Se o resultado era válido para $n = 2$, então duplicando permanece valendo. Em seguida, subtraímos 1 de cada um desses pares, obtendo 1, 5, 3, 7, que também possui a propriedade desejada. Além disso, tomando um número par e um número ímpar, claramente a média não aparece no conjunto.

ii) Suponha que seja possível arranjar os números $1, 2, ..., 2^k$ na forma

$$a_1, a_2, ..., a_{2^k}$$

com a propriedade desejada.

iii) Para 2^{k+1}, a ideia é a mesma mostrada para se passar de 4 para 8. Separamos os pares e os ímpares de 1 a 2^{k+1} da seguinte forma

$$2a_1, 2a_2, ..., 2a_{2^k}; 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, ..., 2a_{2^k} - 1.$$

Mostrado que o resultado é válido para potências de 2, temos que é verdadeiro, em particular, para 1024. Após chegar à configuração válida para 1024, é só apagar os números 1001 até 1024.

Problema 6. Prove por indução que

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 > \frac{n^4}{4},$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 7. Se A é um conjunto finito com n elementos, mostre que A possui 2^n subconjuntos.

Problema 8. Prove que dentre quaisquer $2m+1$ inteiros distintos, cujos valores absolutos não excedem $2m-1$, é possível encontrar 3 deles cuja soma é igual a 0.
Solução. Provemos o resultado por indução. Para $m = 1$, nossos números serão $\{-1, 0, 1\}$ e sua soma é zero. Suponha que o resultado seja verdadeiro para $m = k-1, k \geq 2$.

Considere um conjunto arbitrário A formado por $2k+1$ números cujos valores absolutos não excedem $2k-1$. Se dentre eles houver $2k-1$ números cujos valores absolutos não excedem $2k-3$, o resultado é verdadeiro pela hipótese de indução.

Caso contrário, sem perda de generalidade, podemos considerar que A contém os números $2k-1, 2k-2, -2k+1(-2k+1$ está) ou $2k-1, 2k-2, -2k+2(-2k+1$ não está e os demais estão). Primeiro, considere os seguintes $2k-2$ pares de números, supondo $2k-1$ e $-2k+1$ no conjunto:

$$(1, 2k-2)$$
$$(2, 2k-3)$$
$$(3, 2k-4)$$
$$\vdots$$
$$(k, k-1)$$

e

$$(-1, -2k+2)$$
$$(-2, -2k+3)$$
$$\vdots$$
$$(-k+1, -k)$$

Se 0 está dentre os números escolhidos, então juntamente com $2k-1$ ou $-2k+1$ teríamos um tripla com soma zero. Senão, teríamos $2k-1$ inteiros de A distribuídos dentre os números desses $2k-2$ pares e dois deles estariam no mesmo par, que juntamente com $2k-1$ ou $-2k+1$ formariam um tripla com soma zero.

Agora, considere que $-2k+1$ e os $2k-4$ pares

$$(1, 2k-3)$$

$$(2, 2k-4)$$

$$(3, 2k-5)$$

$$\vdots$$

$$(k-2, k)$$

e

$$(-2, -2k+3)$$

$$\vdots$$

$$(-k+1, -k)$$

Se 0 ou 1 estiver é trivial. Senão, já escolhemos 3 números $(0, 1, -2k+1)$. Assim teríamos que escolher ainda $2k-3$ números dentre os $2k-4$ pares, e teríamos dois deles no mesmo par.

Problema 9. Prove que a sequência

$$2^2-3, 2^3-3, ..., 2^n-3, ...$$

contém um número infinito de inteiros tais que cada dois deles sejam relativamente primos.

Solução. Provemos por indução.

Suponha que já tenhamos k números $a_1 = 2^{n_1}-3, a_2 = 2^{n_2}-3, ..., a_k = 2^{n_k}-3$, que sejam primos entre si.

Construamos agora a_{k+1} relativamente primo com os k demais. Seja $N = a_1a_2...a_k$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, dentre os $N+1$ números $2^0, 2^1, ..., 2^N$ haverá dois deles, digamos 2^r e 2^s $(r > s)$, com o mesmo resto na divisão por N. Assim, $2^r - 2^s = 2^s(2^{r-s}-1)$ é divisível por N, assim como $2^{r-s}-1$, pois N é ímpar (já que é produto de primos). Portanto, $a_{k+1} = 2^{r-s}-3$ é relativamente primo com N e, consequentemente, com cada um dos $a_1, a_2, ..., a_k$.

Problema 10. Três inteiros foram escritos em um quadro-negro. Então um deles foi apagado e a soma dos outros dois, menos 1, foi escrito em seu lugar. Esse procedimento foi repetido várias vezes até que os números $17, 1983, 1989$ aparecessem eventualmente. É possível que os números iniciais fossem $2, 2, 2$?

Problema 11. Uma quantidade finita de cartões é colocada em duas torres, com mais cartões na torre esquerda que na direita. Cada cartão tem um ou mais nomes distintos escrito nele. Além disso, diferentes cartões podem compartilhar alguns nomes. Para cada nome, definimos uma ação pelo movimento de todo cartão que tem esse mesmo nome escrito nele para a torre oposta. Prove que é sempre possível finalizar com mais cartões na torre da direita através de várias ações para diferentes nomes.

Problema 12. Sejam $F_1 = F_2 = 1$ e, para $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ os números de Fibonacci. Prove o Teorema de Zeckendorff: todo número natural pode ser escrito de maneira única como soma de números de Fibonacci com índices maiores que 1 e não consecutivos.

Dicas

7. Use que, ao acrescentarmos um novo elemento a um conjunto já existente, os subconjuntos do conjunto inicial permanecem e todos elementos, unidos com o novo elemento, formam os novos subconjuntos.

10. Tente mostrar que há sempre 2 números pares em cada tripla.

11. Indução sobre a quantidade de nomes.

Respostas

10. Sempre há a presença de no mínimo 2 números pares. Como no início temos 3 números pares, em seguida teremos 2 pares e um ímpar; e dois pares e um ímpar e dois pares e um ímpar ... Pode-se provar por indução que em qualquer passo teremos sempre 2 números pares e um ímpar. Mas a tripla $(17, 1983, 1989)$ só tem números ímpares e nunca poderá ser obtida de $(2, 2, 2)$.

11. Vamos utilizar indução sobre a quantidade de nomes.
    i. $n = 1$ é trivial.
    ii. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ os n primeiros nomes e a, o nome $n + 1$.
    iii. Para $n + 1$, há 2 casos, sendo a_E e a_D as quantidades de cartões com apenas o nome a nas pilhas esquerdas e direita, respectivamente.

    1^o caso: $a_E \leq a_D$.

    Realize as operações com os nomes $a_1, a_2, ..., a_n$.

    2^o caso: $a_E > a_D$.

    Realize a troca apenas com os cartões em que está escrito apenas o nome a e repita as operações do 1^o caso.

12. $F_2 = 1$. Se F_k é o maior número de Fibonacci menor que ou igual a n, devemos ter $n - F_k < F_{k-1}$ pois, caso contrário, $n - F_k \geq F_{k-1}$ e, portanto, $n \geq F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$, absurdo. Assim, é só escrever $n = F_k + (n - F_k)$ e utilizar hipótese de indução para $n - F_k$.