Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 8

Desigualdades - Parte I

1 Fatos Elementares

i) Nenhum quadrado de número real é negativo.

ii) Desigualdade de Cauchy (Médias Aritmética e Geométrica)

Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais positivos, então

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Para mostrar essa última desigualdade, vamos utilizar um tipo diferente de indução (que não serve para qualquer problema).

1. Se $n = 2$, então $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ pois $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$.

2. Para $n = 4$, então utilizando o caso já mostrado para 2 números, temos

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}}$$
$$\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4},$$

quaisquer que sejam a_1, a_2, a_3, a_4 reais positivos.

3. Assim, podemos escolher $a_4 = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, obter

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_1+a_2+a_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^4 \geq a_1a_2a_3\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3},$$

e concluir que o resultado também é verdadeiro para $n = 3$.

A demonstração segue copiando as ideias acima. Já temos os casos iniciais. Em seguida, supondo o resultado verdadeiro para k, obtemos o resultado para $2k$ e para $k-1$ repetindo os procedimentos realizados nos itens 2 e 3 acima. Assim, provamos a desigualdade para qualquer quantidade natural maior que ou igual a 2 de números reais positivos.

2 Problemas

Problema 1. Determine o valor máximo da função $f(x) = x(1-x)$, sendo $x \in (0;1)$.

Solução. Essa é uma função quadrática. Poderíamos encontrar o seu valor máximo através da ordenada do vértice da parábola (desde que a abscissa do vértice esteja em $(0;1)$, o que, de fato, é verdade).

Mas se resolvermos utilizando a Desigualdade de Cauchy, poderemos aplicar a ideia para funções de grau maior que 2:

$$\frac{x+(1-x)}{2} \geq \sqrt{x(1-x)}$$

$$\Rightarrow x(1-x) \leq \frac{1}{4},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = 1-x$, ou seja, $x = \frac{1}{2}$. Assim, o valor máximo de f é $\frac{1}{4}$.

Observação. Existe uma diferença entre descobrir que $f(x) \leq \frac{1}{4}$ e concluir que $\frac{1}{4}$ é seu valor máximo. Por exemplo, podemos afirmar que $\operatorname{sen} x \leq 3$, porém o valor máximo de $\operatorname{sen} x$ é 1, pois a igualdade em $\operatorname{sen} x \leq 3$ não ocorre.

Problema 2. Determine o valor máximo da função $f(x) = x^3(1-x)$, sendo $x \in (0;1)$.

Solução. Uma ideia possível seria aplicar a Desigualdade de Cauchy com os números reais positivos x^3 e $1-x$:

$$\frac{x^3+(1-x)}{2} \geq \sqrt{x^3(1-x)}.$$

Apesar de verdadeiro, esse fato não nos dá um valor (não poder ser variável) máximo para f.

Outra tentativa seria com $x, x, x, 1-x$, todos positivos:

$$\frac{x+x+x+(1-x)}{4} \geq \sqrt[4]{x^3(1-x)},$$

ou seja,

$$x^3(1-x) \leq \left(\frac{2x+1}{4}\right)^4$$

e, novamente, não achamos um valor máximo. Todavia, chegamos bem perto. Basta substituir $1-x$ por $3(1-x)$:

$$\frac{x+x+x+3(1-x)}{4} \geq \sqrt[4]{x^3 3(1-x)},$$

e daí

$$x^3 3(1-x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow x^3(1-x) \leq \frac{27}{81}.$$

Como a igualdade ocorre com $x = 3(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$, o valor máximo de f é $\frac{27}{81}$.

Problema 3. Determine o valor máximo da função $f(x) = x(1-x)^3$, sendo $x \in (0;1)$.

Problema 4. (Treinamento Cone Sul) Sejam a e b números reais positivos tais que $a+b=1$. Prove que $ab^2 \leq \frac{4}{27}$.

Problema 5. Sejam A, B, C os vértices de um triângulo inscrito em um círculo unitário (ou seja, cujo raio mede 1) e seja P um ponto no perímetro do triângulo. Mostre que

$$PA \cdot PB \cdot PC \leq \frac{32}{27}.$$

Problema 6. Dados números positivos arbitrários a, b, c, prove que ao menos uma das seguintes desigualdades é falsa:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, b(1-c) > \frac{1}{4}, c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Problema 7. (IMO) Sendo K, L, M pontos sobre os lados BC, CA, AB do ΔABC, mostre que a área de ao menos um dos triângulos AML, BKM, CLK é menor que ou igual $\dfrac{1}{4}$ da área do triângulo ABC.

Solução. Sendo $k, l, m \in [0; 1]$, podemos escrever

$$BK = ka, KC = (1-k)a$$
$$CL = lb, LA = (1-l)b$$
$$AM = mc, MB = (1-m)c.$$

Assim,

$$[AML] = \frac{1}{2}mc \cdot (1-l)b \cdot sen\angle A$$
$$\Rightarrow [AML] = m(1-l) \cdot [ABC].$$

Analogamente,

$$[BKM] = k(1-m) \cdot [ABC],$$
$$[CLK] = l(1-k) \cdot [ABC].$$

Supondo que as três áreas em questão sejam maiores que $\dfrac{1}{4}$ da área de ABC, o resultado segue pelo problema 6.

Problema 8. (Treinamento Cone Sul) Sejam h_a, h_b, h_c as alturas do ΔABC. Prove que ΔABC é equilátero $\Leftrightarrow ah_b + bh_c + ch_a$ é igual a 6 vezes a área do ΔABC.

Problema 9. (Treinamento Cone Sul) Seja P um polígono convexo com 2012 lados e com todos os ângulos internos iguais. Sejam $l_1, l_2, ..., l_{2012}$ os comprimentos dos lados consecutivos. Prove que se

$$\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_3} + ... + \frac{l_{2011}}{l_{2012}} + \frac{l_{2012}}{l_1} = 2012,$$

então P é um polígono regular.

Problema 10. Mostre que, se x, y, z são números reais positivos, então

$$\frac{1}{x}(1+xy) + \frac{1}{y}(1+yz) + \frac{1}{z}(1+zx) \geq 6.$$

Problema 11. Prove a desigualdade entre as médias geométrica e harmônica para 2 números a e b reais positivos, ou seja,

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Problema 12. Prove a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética para 2 números reais positivos.

Solução. Devemos mostrar que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2},$$

que é equivalente a $(a-b)^2 \geq 0$.

Problema 13. Prove que se a, b, c são as medidas dos lados de um triângulo e $a^2+b^2 = kc^2$, então $k > \frac{1}{2}$.

Problema 14. a) Prove que se a, b são inteiros positivos com $a \neq -b$, então

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

b) Em uma lousa, escrevemos n números. É permitido apagar qualquer par deles a e b, escrevendo $\frac{a+b}{4}$ no lugar. Repetindo tal procedimento $n-1$ vezes, obtemos o número k. Se os n números iniciais eram 2012, prove que $k \geq \frac{2012}{n}$.

Problema 15. Seja x um número real e m, um natural. Prove que

$$\frac{x(x+1)(x+2)...(x+m-1)}{m(m-1)(m-2)...1} \geq x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{m}}.$$

Dicas

3. Repita a ideia da solução do problema 2.

4. Repita a ideia da solução do problema 2.

5. Repita a ideia da solução do problema 2. Use também potência do ponto P e que, supondo P sobre o lado BC, a corda contendo PA tem medida menor que ou igual à medida 2 do diâmentro.

6. Suponha a possibilidade de ocorrerem as 3 desigualdades e multiplique-as.

8. Use a Desigualdade de Cauchy com ah_b, bh_c, ch_a.

9. Use a Desigualdade de Cauchy com $\dfrac{l_1}{l_2}, \dfrac{l_2}{l_3}, ..., \dfrac{l_{2011}}{l_{2012}}, \dfrac{l_{2012}}{l_1}$.

13. Use o problema 12 e a desigualdade triangular.

14. Compare a soma dos inversos dos números antes e depois de cada substituição de números.

15. Escreva, por exemplo, $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{x+1+1}{3}$ e aplique a Desigualdade de Cauchy. Faça o mesmo para os demais fatores do numerador e do denominador aos pares.

Respostas

13. Pelo enunciado, pelo problema 12 e pela desigualdade triangular, temos

$$\frac{kc^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow k > \frac{1}{2}.$$

14. a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

    b) Por a), segue que a soma dos inversos dos números envolvidos nunca aumenta. Assim, comparando o início e o final dos procedimentos, temos

$$\frac{1}{2012} + ... + \frac{1}{2012} \geq \frac{1}{k}$$
$$\Leftrightarrow n \cdot \frac{1}{2012} \geq \frac{1}{k}$$
$$\Leftrightarrow k \geq \frac{2012}{n}.$$