Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 9

Desigualdades - Parte II

1 A Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sejam $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ números reais. Então:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2.$$

Perceba o padrão que há na aplicação desta desigualdade: multiplicamos os termos de mesma ordem de cada soma do lado esquerdo e, em seguida, extraímos a raiz quadrada; o resultado é colocado na posição correspondente no somatório do lado direito, que será elevado ao quadrado.

Vejamos agora alguns exemplos antes de apresentarmos a demonstração da desigualdade.

Exemplo 1 Prove a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética para n números reais positivos.

Solução. O caso particular para $n = 2$ dessa desigualdade apareceu na aula anterior e a solução apresentada apenas utilizou o fato de um quadrado de número real ser não-negativo. Vejamos agora a solução para uma quantidade qualquer.

Por Cauchy-Schwarz, temos

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(1^2 + 1^2 + ... + 1^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

como desejávamos (a expressão no lado esquerdo é a média quadrática dos n números $a_1, a_2, ..., a_n$).

Exemplo 2 Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Solução. Por Cauchy-Schwarz:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(b^2 + c^2 + a^2\right) \geq (ab + bc + ca)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada, temos o resultado.

Demonstração (da Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Considere a função $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2$. Desenvolvendo, teremos uma função do 2^o grau em x:

$$f(x) = x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2x \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

cujo descriminante é dado por

$$\Delta = 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Como f é uma soma de quadrados, $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Daí, $\Delta \leq 0$ e segue o resultado.

Já a igualdade ocorre quando $\Delta = 0$. Nesse caso, f possui uma raiz (dupla) x_0. Isso implica que

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x_0 - b_k)^2 = 0.$$

Nessa soma, todos os números envolvidos são reais e, portanto, seus quadrados são não-negativos. Assim, $a_k x_0 - b_k = 0, \forall k$, o que indica que, para a igualdade, a_k e b_k são proporcionais para todo k.

2 Problemas

Problema 1. Seja c o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem a e b. Prove que $a + b \leq c\sqrt{2}$.

Solução. Do primeiro exemplo, com $n = 2$, temos

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Daí

$$\frac{c^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Problema 2. Sendo a, b, c números reais positivos, mostre que

$$2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Problema 3. Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos e $y_1, y_2, ..., y_n$ uma permutação dos $x_i, 1 \leq i \leq n$. Prove a desigualdade

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+...+\frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1+x_2+...+x_n.$$

Solução. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$\left(\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+...+\frac{x_n^2}{y_n}\right)(y_1+y_2+...+y_n) \geq (x_1+x_2+...+x_n)^2.$$

O resultado segue do fato de $x_1+x_2+...+x_n = y_1+y_2+...+y_n$ pois os y_i são os x_i em alguma ordem.

Problema 4. (Baltic-Way) Prove que para quaisquer reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ ocorre

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geq \frac{4n^2}{\sum_{k=1}^{n} (x_i+y_i)^2}.$$

Solução. Por Cauchy-Schwarz, garantimos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \sum_{k=1}^{n} (x_i+y_i)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_i+y_i}{\sqrt{x_i y_i}}\right)^2.$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\frac{x_i+y_i}{\sqrt{x_i y_i}} \geq 2.$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \sum_{k=1}^{n} (x_i+y_i)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} 2\right)^2 = (2n)^2 = 4n^2.$$

Problema 5. Se a, b, c são números positivos, prove que

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(a^2c + b^2a + c^2b\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Obs: Resolva esse problema de duas maneiras, utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica e através da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Problema 6. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ números reais positivos tais que $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Mostre que $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Problema 7. Se $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ são $2n$ números reais positivos, mostre que ou

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \geq n$$

ou

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + ... + \frac{b_n}{a_n} \geq n.$$

Problema 8. Sejam a, b, c os lados de um triângulo. Mostre que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solução. Somando 1 a cada fração do lado esquerdo, obtemos

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}.$$

Para mostrar essa última desigualdade, vamos utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$[(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left[\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b}\right] \geq \left[3\sqrt{a+b+c}\right]^2$$

$$[2(a+b+c)]\left[\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b}\right] \geq 9(a+b+c),$$

de onde segue o resultado.

Problema 9. Se $a > 0, b > 0, c > 0$, então prove que $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

Problema 10. (Romênia) Prove que $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$, quaisquer que sejam a, b, c reais positivos.

Problema 11. Sejam a, b, c, d números reais positivos. Mostre que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}.$$

Solução. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}\right) \geq (1 + 1 + 2 + 4)^2 = 64,$$

de onde segue o resultado.

Dicas

2. Passe $a+b+c$ para a esquerda e escreva $2(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+(c+a)$.

5. Faça a primeira solução através da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aplicada a cada soma em parênteses do lado esquerdo. A segunda pode ser obtida através da desigualdade de Cauchy-Schwarz reescrevendo $a^2c+b^2a+c^2b$ como $c^2b+a^2c+b^2a$.

6. Multiplique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k}$ por $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$, aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz e lembre-se de que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = 2\sum_{k=1}^{n} a_k$.

7. Suponha $\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+...+\dfrac{a_n}{b_n} < n$ ou $\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+...+\dfrac{b_n}{a_n} < n$ e aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz com as somas nos lados esquerdos dessas duas desigualdades. Conclua, assim, um absurdo.

9. Escreva $\dfrac{bc}{a} = \sqrt{\dfrac{bc}{a}}^2$ (repita o mesmo para as demais parcelas do lado esquerdo) e utilize o exemplo 2.

10. Repita a ideia do problema 9.

Soluções

2. Por Cauchy-Schwarz

$$((a+b)+(b+c)+(c+a))\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9.$$

5. 1^a Solução. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a}$$
$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a \geq 3abc.$$

Analogamente,

$$a^2c+b^2a+c^2b \geq 3abc.$$

Multiplicando essas duas desigualdades, segue o resultado.

2^a Solução. Por Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(c^2b+a^2c+b^2a\right) \geq (abc+abc+abc)^2 = 9a^2b^2c^2.$$

6. Por Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) \geq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\cdot 2\sum_{k=1}^{n}a_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

7. Supondo $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n} < n$ ou $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+...+\frac{b_n}{a_n} < n$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela última hipótese, temos

$$n^2 \leq \left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\right)\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+...+\frac{b_n}{a_n}\right) < n^2,$$

um absurdo. Logo, ao menos uma das desigualdades

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \geq n,$$

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + ... + \frac{b_n}{a_n} \geq n$$

é verdadeira.

9. Utilizando o resultado do exemplo 2, obtemos

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}^2 + \sqrt{\frac{ca}{b}}^2 + \sqrt{\frac{ab}{c}}^2 \geq \sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}} = c + a + b.$$