Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 10

Problemas Envolvendo Máximos e Mínimos

Vamos iniciar esta aula aplicando desigualdades aprendidas nas últimas duas aulas focando mais em exemplos envolvendo máximos e mínimos de funções.

Problema 1. Determine o valor máximo da função $f(x) = x(1-x)^3$, sendo $x \in (0;1)$.
Solução. A ideia da solução desse problema já foi aprendida na aula 8. Vamos rever como resolvê-lo e, mais uma vez, chamar a atenção para a diferença existente entre obter $f(x) \leq k$ e garantir que k é o valor máximo de f.

Através da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, já que x e $1-x$ são positivos, obtemos

$$\frac{3x + (1-x) + (1-x) + (1-x)}{4} \geq \sqrt[4]{3x(1-x)^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^4 \geq 3x(1-x)^3$$

$$\Leftrightarrow x(1-x)^3 \leq \frac{27}{256}.$$

Nesse momento, a expectativa óbvia é de que $\frac{27}{256}$ deva, de fato, ser o valor máximo de f, mas ainda precisamos garantir esse fato.

E como conseguiremos essa garantia? Da mesma forma que procedemos na aula 8. Mostrar que o máximo de f é $\frac{27}{256}$ é equivalente a achar um valor de $x \in (0;1)$ que dê a igualdade na desigualdade, e isso ocorre (graças à condição de igualdade em MA $\geq$ MG) quando $3x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$, que é um valor no intervalo $(0;1)$.

Portanto, $\frac{27}{256}$ realmente é o valor máximo de f.

Problema 2. Determine o valor máximo da função $f(x) = x^4(2-x)$, sendo $x \in (0; 2)$.

Problema 3. Seja a um número real positivo dado. Determine o valor de $x \in [0; a]$ que maximiza o valor de $f(x) = x^5(a-x)$.

Problema 4. Seja $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Determine o valor mínimo de $x^2 + \dfrac{2}{x}$.

Problema 5. (EUA) Considere a equação $3x^2 - 4x + k = 0$ com raízes reais. Determine o valor de k para o qual o produto das raízes da equação seja máximo.

Problema 6. Se x, y, z são reais e satisfazem $x + y + z = 5$ e $yz + zx + xy = 3$, prove que $-1 \leq z \leq \dfrac{13}{3}$ e determine o valor mínimo de z.
Solução. De $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$, obtemos $x^2 + y^2 + z^2 = 19$. Assim, por Caychy-Schwarz, chegamos a

$$(x^2 + y^2)(1+1) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow \left(19 - z^2\right) \cdot 2 \geq (5-z)^2$$
$$\Leftrightarrow 38 - 2z^2 \geq 25 - 10z + z^2$$
$$\Leftrightarrow 3z^2 - 10z - 13 \leq 0,$$

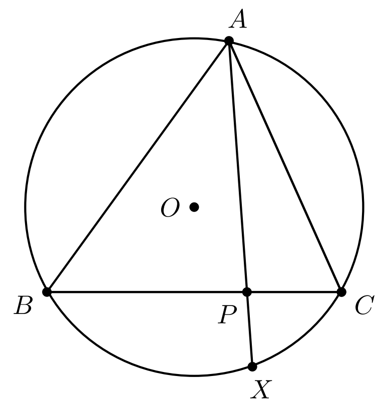
cuja solução é $-1 \leq z \leq \dfrac{13}{3}$. O valor mínimo de z, de fato, é -1, quando $x = y = 3$.

Problema 7. Seja k uma constante real positiva. Dentre todos os triângulos tendo base a e altura relativa a essa base h, sendo $a + h = k$, determine aquele(s) cuja área é máxima.

Problema 8. Sejam A, B, C os vértices de um triângulo inscrito em um círculo unitário (ou seja, cujo raio mede 1) e seja P um ponto no perímetro do triângulo. Mostre que

$$PA \cdot PB \cdot PC \leq \frac{32}{27}.$$

Solução. Nesse problema, não foi pedido o valor máximo de $PA \cdot PB \cdot PC$. Mesmo assim, vamos mostrar que $PA \cdot PB \cdot PC \leq \dfrac{32}{27}$ e, em seguida, examinar se a igualdade pode ocorrer, ou seja, se o valor máximo de $PA \cdot PB \cdot PC$ é $\dfrac{32}{27}$.



Pela potência do ponto P em relação a (ABC) (ABC entre parênteses representa o a circunferência que passa pelos pontos A, B e C), temos

$$PB \cdot PC = PA \cdot PX.$$

Daí, utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$2PA \cdot PB \cdot PC = PA^2 \cdot 2PX \leq \left(\frac{PA + PA + 2PX}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{2AX}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow PA \cdot PB \cdot PC \leq \frac{32}{27},$$

utilizando que AX é uma corda e, portanto, tem medida menor que ou igual à medida do diâmetro, que é 2.

Já conseguimos chegar ao resultado pedido no enunciado. Agora, vamos verificar se é possível obtermos o valor máximo $\frac{32}{27}$.

Essa igualdade ocorre se, e somente se, P está sobre o diâmetro que passa por A e $PA = 2PX = \frac{4}{3}$, que depende do triângulo ABC inicial. Portanto, nem sempre a igualdade ocorre.

Problema 9. Sejam a e b números reais positivos. Ache o valor máximo da função real e de variável real

$$y = \frac{x}{ax^2 + b}.$$

Solução. Podemos escrever a equação acima da seguinte forma

$$ayx^2 - x + by = 0,$$

cujo discriminante é

$$\Delta = 1 - 4aby.$$

Como $x \in \mathbb{R}$, temos $\Delta \geq 0$, ou seja, $y \leq \dfrac{1}{4ab}$.

Assim, $\dfrac{1}{4ab}$ é o nosso candidato a valor máximo da função. Para esse valor ser atingido, devemos ter $\Delta = 0$ e, portanto

$$x = \frac{1}{2ay} = 2b.$$

Pense também em uma solução começando com MA $\geq$ MG entre ax^2 e b.

Problema 10. Seja P um ponto no interior de um triângulo $A_1A_2A_3$ e P_1, P_2, P_3, os pés das perpendiculares de P a A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Localize o ponto P tal que

$$\frac{A_1A_2}{PP_3} + \frac{A_2A_3}{PP_1} + \frac{A_3A_1}{PP_2}.$$

seja mínimo.

Solução. Vamos pensar um pouquinho. As frações envolvidas nessa soma relacionam bases e alturas (pense sempre que distâncias lembram alturas e que alturas lembram área) dos triângulos A_2PA_3, A_3PA_1, A_1PA_2 e, portanto, nos fazem pensar nas áreas desses triângulos, e a área do triângulo $A_1A_2A_3$ será a soma dessas áreas.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left(\frac{A_1A_2}{PP_3} + \frac{A_2A_3}{PP_1} + \frac{A_3A_1}{PP_2}\right)(A_1A_2 \cdot PP_3 + A_2A_3 \cdot PP_1 + A_3A_1 \cdot PP_2)$$

$$\geq (A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1)^2.$$

Como

$$A_1A_2 \cdot PP_3 + A_2A_3 \cdot PP_1 + A_3A_1 \cdot PP_2 = 2S$$

e

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = p,$$

sendo S a área e p o perímetro do triângulo $A_1A_2A_3$, chegamos a

$$\frac{A_1A_2}{PP_3}+\frac{A_2A_3}{PP_1}+\frac{A_3A_1}{PP_2}\ge\frac{p^2}{2S}.$$

Portanto, o candidato a valor mínimo de $\dfrac{A_1A_2}{PP_3}+\dfrac{A_2A_3}{PP_1}+\dfrac{A_3A_1}{PP_2}$ é $\dfrac{p^2}{2S}$.

Esse valor mínimo será atingido se a igualdade ocorrer na desigualdade. A igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz ocorre com a proporção entre as respectivas parcelas das somas envolvidas, ou seja,

$$\frac{\dfrac{A_1A_2}{PP_3}}{A_1A_2\cdot PP_3}=\frac{\dfrac{A_2A_3}{PP_1}}{A_2A_3\cdot PP_1}=\frac{\dfrac{A_3A_1}{PP_2}}{A_3A_1\cdot PP_2}$$

$$\Leftrightarrow PP_1=PP_2=PP_3,$$

de onde segue que o valor mínimo é atingido e é quando P é o incentro do triângulo $A_1A_2A_3$.

Dicas

2. Repita as ideias da solução do problema 1.

3. Repita as ideias da solução do problema 1.

4. Repita as ideias da solução do problema 1.

5. Denote por x_1 e x_2 as raízes. Assim, $x_1 + x_2 = \dfrac{4}{3}$ e $x_1x_2 = \dfrac{k}{3}$. Escreva $x_2 = \dfrac{4}{3} - x_1$ e repita as ideias da solução do problema 1.

7. Use $h = k - a$ e repita as ideias da solução do problema 1.

Soluções

2. Por MA $\geq$ MG, temos

$$\frac{x+x+x+x+4(2-x)}{5} \geq \sqrt[5]{4x^4(2-x)}$$

$$\Rightarrow x^4(2-x) \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^5 = \frac{4^9}{5^5}.$$

3. Por MA $\geq$ MG, temos

$$\frac{x+x+x+x+x+5(a-x)}{6} \geq \sqrt[6]{5x^5(a-x)}$$

$$\Rightarrow x^5(a-x) \leq \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5a}{6}\right)^6 = 5^5\left(\frac{a}{6}\right)^6.$$

7. Por MA $\geq$ MG, temos

$$\frac{a+(k-a)}{2} \geq \sqrt{a(k-a)}$$

$$\Rightarrow \frac{a(k-a)}{2} \leq \frac{k^2}{8},$$

   com igualdade se, e somente se, $a = k - a$, ou seja, $a = \dfrac{k}{2}$. Nesse caso, $h = \dfrac{k}{2}$ também, o que determina os triângulos com área máxima.