Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 11

Funções Definidas Implicitamente - Parte I

Talvez a experiência de alguns de vocês diga que as soluções de uma equação devam ser necessariamente números. Mas isso não é verdade. Em matemática, podemos ter, por exemplo, matrizes ou funções como soluções para equações matriciais ou funcionais, respectivamente.

Nesta aula, vamos aprender resolver algumas equações funcionais, que têm funções como soluções e, por isso, dizemos que essas funções foram definidas implicitamente (implícito significa escondido).

Problema 1. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ tais que $f(1) = c$ e

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}_+.$$

Solução. Nesse problema, a equação funcional é $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Precisamos resolvê-la.

Observe que o problema nos permite utilizarmos quaisquer valores inteiros não-negativos para x e y. Assim, vamos iniciar com $x = y = 0$:

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Agora, façamos a escolha de deixar x variável e $y = 1$:

$$f(x + 1) = f(x) + f(1) = f(x) + c.$$

Acabamos de gerar uma equação de diferença, tipo explorado na aula de somas telescópicas. Vamos escrever várias dessas equações, variando $n \geq 2$:

$$f(n) = f(n-1) + c$$
$$f(n-1) = f(n-2) + c$$
$$\vdots$$

$$f(2) = f(1) + c$$

e somá-las, obtendo

$$f(n) = cn.$$

Assim, a (única) solução é $f(x) = cx$, sendo $c = f(1)$. (Poderíamos, também, ter aplicado a fórmula do termo geral da P.A.)

Problema 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 1$ e, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xy + 1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2.$$

Determine o valor de f(2012).

Problema 3. Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a equação funcional

$$f(a) + f(b) = f(ab), \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Mostre que:

a) $f(1) = 0$.

b) $f(a^n) = n \cdot f(a), \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = -f(a), \forall a \in \mathbb{R}_+^*$.

Solução.

a) Com $a = b = 1$, obtemos $f(1) + f(1) = f(1 \cdot 1)$, ou seja, $f(1) = 0$.

b) Observe que a equação funcional dada nos dá permição para operar apenas com 2 números (a e b). Podemos mostrar, utilizando indução, que também será possível operar com qualquer quantidade finita (no mínimo 2) de números. Supondo ser possível para k números, ou seja, que

$$f(a_1) + ... + f(a_k) = f(a_1 \cdot ... \cdot a_k),$$

podemos garantir que

$$f(a_1) + ... + f(a_k) + f(a_{k+1}) = f(a_1 \cdot ... \cdot a_k) + f(a_{k+1}) = f(a_1 \cdot ... \cdot a_k \cdot a_{k+1}).$$

Assim, podemos escrever

$$f(a^n) = f(\underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{n}) = \underbrace{f(a) + ... + f(a)}_{n} = n \cdot f(a).$$

c) $f(a) + f\left(\dfrac{1}{a}\right) = f\left(a \cdot \dfrac{1}{a}\right) = f(1) = 0$, ou seja, $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = -f(a)$.

Problema 4. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função satisfazendo

$$f(n^2) = f(n+m)f(n-m) + m^2, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Determine o conjunto de todos os possíveis valores de $f(0)$.

Problema 5. Seja f uma função com duas propriedades:

i. $f(x+y) = x + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$;

ii. $f(0) = 2$.

Determine o valor de $f(2012)$.

Problema 6. (EUA) Seja f uma função satisfazendo $f(xy) = \dfrac{f(x)}{y}$ para todos os números reais positivos x e y. Se $f(500) = 3$, qual é o valor de $f(600)$?

Problema 7. Para todos os inteiros x, a função f satisfaz $f(x+1) = \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$. Se $f(1) = 2$, calcule $f(2012)$.

Solução. Com:

$x = 1$, obtemos $f(2) = \dfrac{1+3}{1-3} = -2$;

$x = 2$, obtemos $f(3) = \dfrac{1-2}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$;

$x = 3$, obtemos $f(4) = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$;

$x = 4$, obtemos $f(5) = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$.

Como o valor 3 apareceu novamente e a regra que calcula cada novo valor é sempre a mesma, os valores vão sempre se repetir de 4 em 4 na sequência $3, -2, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}$. Por 2012 ser múltiplo de 4, segue que $f(2012) = f(4) = \dfrac{1}{2}$.

Problema 8. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y, \forall x, y.$$

Solução. Atribuindo o valor 0 a x e a y, temos $(f(0))^2 - f(0) = 0$. Assim, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Suponha $f(0) = 0$ e atribua 0 apenas à variável y. Daí, $f(x) \cdot 0 - 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$, absurdo. Portanto, $f(0) = 1$.

Fazendo $y = 0$, obtemos $f(x)f(0) - f(0) = x + 0$, ou seja, $f(x) = x + 1$, que é a única solução. (Substitua essa solução na equação funcional para verificar a igualdade!)

Problema 9. Considere uma função f definida no conjunto dos números naturais tal que

$$f(n+2) = 3 + f(n), \forall n \in \mathbb{N}, f(0) = 10, f(1) = 5.$$

Qual o valor de $\sqrt{f(81) - f(70)}$?

Problema 10. Seja $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ uma função tal que

$$f\left(xf(y)\right) = \frac{f(x)}{y}, \forall x, y \in \mathbb{Q}_+^*.$$

Mostre que $f\left(f(x)\right) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{Q}_+^*$.

Solução. Temos

$$y \cdot f\left(xf(y)\right) = f(x) \Rightarrow f\left(f(x)\right) = f\left(y \cdot f\left(xf(y)\right)\right) = \frac{f(y)}{xf(y)} = \frac{1}{x}.$$

Problema 11. A função f é definida para todos os pares ordenados (x, y) de inteiros positivos e tem as seguintes propriedades:

i. $f(x, x) = x$,

ii. $f(x, y) = f(y, x)$,

iii. $(x + y)f(x, y) = yf(x, x + y)$.

Qual é o valor de $f(22, 55)$?

Solução. De iii, obtemos

$$\begin{aligned} 55f(22, 33) &= 33f(22, 55) \\ 33f(22, 11) &= 11f(22, 33) \\ 22f(11, 11) &= 11f(11, 22), \end{aligned}$$

utilizando ii no lado direito da última equação. Multiplicando-as, obtemos:

$$\begin{aligned} 55 \cdot 33 \cdot 22f(11, 11) &= 33 \cdot 11 \cdot 11f(22, 55) \\ &\Rightarrow f(22, 55) = 110. \end{aligned}$$

Problema 12. A função f, definida sobre o conjunto de todos os pares ordenados de inteiros positivos, satisfaz as seguintes propriedades:

i. $f(x, x) = x$;

ii. $f(x, y) = f(y, x)$;

iii. $(x + y)f(x, y) = yf(x, x + y)$.

Calcule $f(14, 52)$.

Problema 13. Se

$$f(n + 1) = (-1)^{n+1} \cdot n - 2f(n)$$

para os inteiros $n \geq 1$ e $f(1) = f(2013)$, determine valor da soma

$$f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2012).$$

Problema 14. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, injetoras, satisfazendo

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \forall m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Solução. Atribuindo o valor 0 às variáveis m e n, temos

$$f(f(0)) = f(f(0)) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Agora, atribuindo o valor 0 apenas à variável n, obtemos

$$f(m) = f(f(m)).$$

Como f é injetora, segue que $f(m) = m, \forall m$. (Se f é uma função injetora, então $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.)

Problema 15. Considere a equação funcional

$$f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in Dom(f).$$

Mostre que se $0 \in Dom(f)$, então existe uma única solução para a equação dada.

Problema 16. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente (isto é, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$) tal que $f(2) = 2$ e $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo par de inteiros positivos m e n primos entre si. Determine o valor de $f(3)$.

Solução. Inicialmente, observe que o problema não permite escrever $f(4) = f(2)f(2) = 4$, pois o máximo divisor comum entre 2 e 2 não é 1.

i. 2 e 5 são primos entre si: $f(10) = f(2)f(5) = 2f(5)$.

ii. 2 e 9 são primos entre si: $f(18) = f(2)f(9) = 2f(9)$.

iii. 3 e 5 são primos entre si: $f(15) = f(3)f(5)$.

iv. f é estritamente crescente: $f(9) < f(10)$, $f(15) < f(18)$ e $f(3) > f(2) = 2$.

Logo, $4f(5) = 2f(10) > 2f(9) = f(18) > f(15) = f(3)f(5)$ e, portanto, $f(3) < 4$. Assim, $2 < f(3) < 4$, ou seja, $f(3) = 3$.

Dicas

2. Calcule $f(1)$. Depois faça $y = 1$.
4. Faça $m = n = 0$. Em seguida, faça $m = n = 2$.
5. Faça $x = 1, y = 0$. Depois faça $y = 1$ e deixe x variável.
6. Faça $x = 100$ e $y = 5$.
9. Calcule as imagens de números pares e ímpares separadamente.
12. Repita a solução do problema 11.
13. Faça $n = 1, 2, ..., 2011$.
15. Faça $y = 0$.

Respostas e Soluções

2. Com $x = y = 0$, obtemos $f(1) = 2$. Com $y = 1$, segue

$$f(x+1) = f(x)f(1) - f(1) - x + 2 = 2f(x) - x.$$

Com $x = 1$ e $x = 2$, obtemos, respectivamente:

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3,$$
$$f(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4.$$

Vamos mostrar por indução que $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{Z}_+$. Os casos iniciais já foram verificados. Além disso, $f(x+1) = 2(x+1) - x = x+2$. Em particular, $f(2012) = 2013$.

4. Inicialmente, com $m = n = 0$ temos $f(0) = (f(0))^2 \Rightarrow f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Por outro lado, com $m = n = 2$ obtemos $f(4) = f(4)f(0) + 4$, que mostra que $f(0) = 1$.

5. Com $x = 1, y = 0$, achamos $f(1) = f(1+0) = 1 + f(0) = 3$. Em seguida, escolhemos apenas $y = 1$, obtemos $f(x+1) = x + f(1) = x + 3$, que é uma P.A. se $x \in \mathbb{Z}_+$. Assim, $f(2012) = f(0) + 2012 \cdot 3 = 6038$.

6. $f(500) = \dfrac{f(100)}{5} \Rightarrow f(100) = 15$. Logo, $f(600) = \dfrac{f(100)}{6} = \dfrac{5}{2}$.

9. Somando

$$f(2) = 3 + f(0)$$
$$\vdots$$
$$f(70) = 3 + f(68)$$

obtemos $f(70) = 3 \cdot 35 + 10 = 115$. E pela soma de

$$f(3) = 3 + f(1)$$
$$\vdots$$
$$f(81) = 3 + f(79)$$

obtemos $f(81) = 3 \cdot 40 + 5 = 125$. Logo, $\sqrt{f(81) - f(70)} = \sqrt{10}$.

12. 364.

13. Com $n = 1, 2, ..., 2012,$ temos:

$$f(2) = 1 - 2f(1)$$
$$f(3) = -2 - 2f(2)$$
$$\vdots$$
$$f(2013) = -2012 - 2f(2012).$$

Sendo $f(1) = f(2013)$ e $S = f(1) + ... + f(2012)$, obtemos:

$$S = (1 - 2) + ... + (2011 - 2012) - 2S \Rightarrow S = -\frac{1006}{3}.$$

15. Com $y = 0$, obtemos $f(x) = 0, \forall x$.