Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 12

Funções Definidas Implicitamente - Parte II

Nesta segunda aula sobre funções definidas implicitamente, aprofundaremos alguns exercícios vistos na aula anterior e veremos exemplos envolvendo funções compostas, ou seja, funções de outras funções.

Iniciaremos resolvendo o problema 1 da aula anterior mas, agora, com domínio racional.

Problema 1. Determine todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que $f(1) = c$ e

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Solução. Já vimos na aula anterior que $f(x) = cx$ quando x é inteiro não-negativo.

Agora, suponha x inteiro negativo. Fazendo y receber o valor contrário de x (assim, $y = -x > 0$), obtemos

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x) (*)$$
$$\Rightarrow f(x) = -f(-x) = -(c(-x)) = cx,$$

e o resultado também é válido para inteiros negativos.

Suponha, agora, x inteiro positivo. Podemos escrever

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{x} + ... + \frac{1}{x}}_{x}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{x}\right) + ... + f\left(\frac{1}{x}\right)}_{x} = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = c \cdot \frac{1}{x},$$

lembrando que no problema 3 da aula anterior já mostramos por indução para uma equação funcional semelhante que podemos aplicar a regra, dada no problema para 2 números, para qualquer quantidade finita de números. Por (*), segue que $f\left(\frac{1}{x}\right) = c \cdot \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{Z}^*$.

Seja agora x racional não-nulo, isto é, $x = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros, sendo $p > 0$. Temos

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q}}_{p}\right)$$

$$= \underbrace{f\left(\frac{1}{q}\right) + ... + f\left(\frac{1}{q}\right)}_{p} = pf\left(\frac{1}{q}\right) = p \cdot c \cdot \frac{1}{q} = cx,$$

finalizando a solução.

Problema 2. Determine todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que $f(1) = a$ e

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Problema 3. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(x) + f(2x+y) + 5xy = f(3x-y) + 2x^2 + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Solução. Fazendo $x = 2y$, obtemos $2x + y = 3x - y$ e

$$f(x) + \frac{5x^2}{2} = 2x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Problema 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a equação funcional

$$f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2x \cdot f(y) + y^2.$$

Determine todos os possíveis valores de $f(0)$.

Problema 5. (ITA) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = 1 - x$ e

$$f(x) + 2f(2-x) = (x-1)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determine $f(g(x))$.

Solução. A equação funcional em questão possui uma composição de funções em $f(2-x)$. Sendo $h(x) = 2 - x$, temos $f(2-x) = f(h(x))$. Essa função h é a chave do problema. Reescreva a equação substituindo x por $h(x) = 2 - x$, ou seja, $x \leftarrow 2 - x$ (lê-se: x *recebe* $2 - x$):

$$f(2-x) + 2f(x) = (1-x)^3.$$

Dessa e da equação dada, obtemos $f(x) = (1-x)^3$ e, portanto,

$$f(g(x)) = (1-(1-x))^3 = x^3.$$

Obs: $h(h(x)) = 2 - h(x) = x$. Por isso são suficientes apenas 2 equações para encontrarmos $f(x)$.

Problema 6. Se $2f\left(x^2\right)+3f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2-1$, determine $f\left(x^2\right)$.

Problema 7. Se $f(x)+2f(1-x)=x^2+2, \forall x \in \mathbb{R}$, determine $f(x)$.

Problema 8. Determine f sabendo que $f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=x, x \neq 1$.

Solução. Novamente, a chave do problema está em fazer $x \leftarrow \dfrac{1}{1-x}$. Nesse caso, temos $\dfrac{1}{1-x} \leftarrow \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$. Assim:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{1-x}.$$

Mas diferentemente dos problemas mais simples, envolvendo funções mais simples, não podemos combinar apenas essa última equação com a equação dada porque ainda não obtivemos outro $f(x)$.

Assim, vamos novamente promover a substituição $x \leftarrow \dfrac{1}{1-x}$, que nos dá $\dfrac{x-1}{x} \leftarrow x$ (verifique!). Logo:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+f(x)=\frac{x-1}{x}.$$

Combinando as equações, obtemos

$$2f(x)=x-\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}.$$

Obs: $h(x)=\dfrac{1}{1-x} \Rightarrow h(h(x))=\dfrac{x-1}{x}$ e $h(h(h(x)))=x$. Por isso são necessárias 3 equações para encontrarmos $f(x)$.

Problema 9. Determine a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ satisfazendo à equação funcional

$$x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4.$$

Problema 10. (Ibero) Ache todas as f tais que $(f(x))^2\cdot f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=64x$, para todo x distinto de 0, 1 e -1.

Problema 11. (EUA) A função f não está definida para $x=0$, mas para todos os valores de x não-nulos temos $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$. Determine as soluções da equação $f(x)=f(-x)$.

Problema 12. Seja f uma função cujo domínio é o conjunto de todos os números reais. Se

$$f(x) + 2f\left(\frac{x+2011}{x-1}\right) = 4033 - x$$

para todo $x \neq 1$, encontre o valor de $f(2013)$.

Problema 13. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = x, \forall x \neq \pm 1$.

Solução. Faça $x \leftarrow -x$:

$$f\left(\frac{-x-3}{-x+1}\right) + f\left(\frac{-x+3}{-x-1}\right) = -x$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) + f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = -x, \forall x \neq \pm 1.$$

Portanto, $x = -x, \forall x \neq \pm 1$, absurdo. Logo, não existe função f cumprindo a equação funcional dada.

Problema 14. Determine todas as funções f reais, de variável real positiva, satisfazendo a condição $f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$.

Problema 15. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $2f(x) + f(1-x) = 1 + x$.

Dicas

2. Repita os procedimentos do problema 1.
4. Faça $x = y = 0$.
6. Faça $x \leftarrow \dfrac{1}{x}$.
7. Faça $x \leftarrow 1 - x$.
9. Faça $x \leftarrow 1 - x$.
10. Faça $x \leftarrow \dfrac{1-x}{1+x}$.
11. Faça $x \leftarrow \dfrac{1}{x}$.
12. Faça $x \leftarrow \dfrac{x+2011}{x-1}$.
14. Faça $x \leftarrow \dfrac{2002}{x}$.
15. Faça $x \leftarrow 1 - x$.

Respostas e Soluções

2. $f(x) = a^x$.

4. $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

6. $f(x) = \dfrac{\left(1-x^2\right)\left(3+2x^2\right)}{5x^2}$.

7. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{3}$

9. Fazendo $x \leftarrow 1-x$ e combinando com a equação dada, chegamos a $f(x) = 1-x^2$.

10. $f(x) = 4\sqrt[3]{\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}}$.

11. Fazendo $x \leftarrow \dfrac{1}{x}$ e combinando o resultado com a equação inicial, obtemos $f(x) = \dfrac{2}{x} - x$. Assim, as soluções de $f(x) = f(-x)$ são $\pm\sqrt{2}$.

12. 2014.

14. Fazendo $x \leftarrow \dfrac{2002}{x}$ e combinando com a equação inicial, obtemos $f(x) = \dfrac{4004}{x} - x$.

15. $f(x) = x$.