Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 13

Revisão - Parte I

Como o título indica, faremos uma breve revisão de temas já abordados em nosso treinamento, a fim de consolidar conceitos e ideias importantes para a fase final da OBM.

Iniciaremos resolvendo os problemas das OBMs passadas, propostos na 1^a aula sobre produtos notáveis, mas não resolvidos.

Ao final, estão propostos mais alguns problemas semelhantes aos tratados até agora.

Problema 1. (OBM 1^a fase/2002) Se $xy = 2$ e $x^2 + y^2 = 5$, então $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2$ vale:

a) $\dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{25}{4}$

c) $\dfrac{5}{4}$

d) $\dfrac{1}{2}$

e) 1

Solução. Veja que $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2 = \dfrac{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}{x^2y^2} = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2} = \dfrac{25}{4}$. Letra B.

Problema 2. (OBM 3^a fase/2003) Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$ quaisquer que sejam os reais x e y.

Solução. Procurando agrupar os termos para obter uma fatoração, podemos escrever

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2(x - 2y) + 2$$

$$= (x-2y)^2 + 2(x-2y) + 1 + 1 = [(x-2y)+1]^2 + 1 \geq 1 > 0,$$

pois $[(x-2y)+1]^2$ é não-negativo já que é o quadrado de um número real.

Problema 3. (OBM 2^a fase/2005)

a) Fatore a expressão $x^2 - 9xy + 8y^2$.

b) Determine todos os pares de inteiros $(x; y)$ tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$.

Solução.

a) $x^2 - 9xy + 8y^2 = x^2 - xy - 8xy + 8y^2 = x(x-y) - 8y(x-y) = (x-y)(x-8y)$.

b) Pelo item a, podemos escrever

$$(x-y)(8y-x) = 2005 = 5 \cdot 401,$$

e 401 é primo. Agora vejamos as possibilidades:

i. $\begin{cases} x-y &= 5 \\ 8y-x &= 401 \end{cases} \Rightarrow x = 63, y = 58.$

ii. $\begin{cases} x-y &= -5 \\ 8y-x &= -401 \end{cases} \Rightarrow x = -63, y = -58.$

iii. $\begin{cases} x-y &= 401 \\ 8y-x &= 5 \end{cases} \Rightarrow x = 459, y = 58.$

iv. $\begin{cases} x-y &= -401 \\ 8y-x &= -5 \end{cases} \Rightarrow x = -459, y = -58,$

que são todos os casos.

Problema 4. (OBM 1^a fase/2005) Os inteiros positivos x e y satisfazem a equação

$$\sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{y}} = 1.$$

Qual das alternativas apresenta um possível valor de y?

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

Solução. Talvez fiquem interessantes as substituições $\sqrt{x+\frac{1}{2}\sqrt{y}} = A$ e $\sqrt{x-\frac{1}{2}\sqrt{y}} = B$. Assim, temos $A - B = 1$ e $A^2 - B^2 = \sqrt{y}$, que implica $A + B = \sqrt{y}$. Daí, $A = \dfrac{\sqrt{y}+1}{2}$ e, portanto:

$$x + \frac{1}{2}\sqrt{y} = \frac{y + 2\sqrt{y} + 1}{4} = \frac{y+1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{y}$$
$$\Rightarrow y = 4x - 1.$$

Dentre as opções, a única que deixa resto '-1' na divisão por 4 é 7. Letra C.

Problema 5. (OBM 3^a fase/2006) Encontre todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros tais que $x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)$.

Solução. Fatorando, obtemos $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 3(x-y)(x+y)$.

Assim, temos solução quando $x = y, x \in \mathbb{R}$.

Se $x \neq y$, então $x^2+xy+y^2 = 3(x+y) \Leftrightarrow x^2+x(y-3)+y^2-3y = 0$, cujo discriminante é $\Delta = -3y^2+6y+9$. Para que as raízes sejam reais, devemos ter $\Delta \geq 0$, ou seja, $-1 \leq y \leq 3$. Testando, apenas $y = 1$ não gera Δ quadrado perfeito. Os demais valores dão as seguintes soluções:

$$y = -1, \Delta = 0, x = 2;$$
$$y = 0, \Delta = 9, x = 0; x = 6;$$
$$y = 2, \Delta = 9, x = 2; x = -1;$$
$$y = 3, \Delta = 0, x = 0.$$

Resposta: $\{(2,0); (0,0); (6,0); (2,2); (2,-1); (3,0)\} \bigcup \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$.

Problema 6. (OBM 2^a fase/2006) Sejam a e b números reais distintos tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$.

a) Determine o valor de $a + b$.

b) Determine o valor de ab.

Solução.

a) Subtraindo as equações membro a membro, obtemos $a^2 - b^2 = 6(b-a)$. Como a e b são distintos, chegamos a $a + b = 6$.

b) Agora, somando as equações membro a membro, temos $a^2 + b^2 = 6(a+b) + 10ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 6(a+b) + 12ab$, o que dá $ab = 0$.

Problema 7. (OBM 2^a fase/2008) Sejam x e y números reais positivos satisfazendo as equações $x^2+y^2=1$ e $x^4+y^4=\frac{17}{18}$. Calcule o valor de $\frac{1}{xy}$.

Solução. De $x^2+y^2=1$, obtemos

$$x^4+y^4+2x^2y^2=1 \Leftrightarrow 2x^2y^2=1-\frac{17}{18}=\frac{1}{18} \Leftrightarrow x^2y^2=\frac{1}{36}.$$

Como x e y são positivos, segue que $xy=\dfrac{1}{6}$ e $\dfrac{1}{xy}=6$.

Problema 8. (OBM 1^a fase/2010) Quantos são os pares (x,y) de inteiros positivos tais que $x^2-y^2=2^{2010}$?

a) 1000

b) 1001

c) 1002

d) 1003

e) 1004

Solução. Temos $(x+y)(x-y)=2^{2010}$. Como $x+y>0$, então $x-y>0$. Além disso, $x+y>x-y$ (pois $y>0$) e $x+y$ deve ter a mesma paridade de $x-y$.

Assim, as possibilidades são

$$\begin{cases} x+y &= 2^{2009} & ,2^{2008} & ,\dots & ,2^{1006} \\ x-y &= 2 & ,2^2 & ,\dots & ,2^{1004} \end{cases},$$

que geram 1004 pares ordenados. Letra E.

Problema 9. (OBM 3^a fase/2010) Sejam a,b e c reais tais que $a\neq b$ e $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2010$. Calcule $c^2(a+b)$.

Solução. De $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2010$, obtemos

$$\begin{gathered} a^2b-b^2a+a^2c-b^2c=0 \\ \Leftrightarrow ab(a-b)+c(a+b)(a-b)=0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(ab+bc+ca)=0. \end{gathered}$$

Como $a\neq b$, concluímos que $ab+bc+ca=0$.

Agora, vamos fazer o mesmo com $b^2(c+a)=2010$ e $c^2(a+b)=k$. Subtraindo obtemos

$$b^2c-c^2b+b^2a-c^2a=2010-k$$

$$\Leftrightarrow bc(b-c) + a(b+c)(b-c) = 2010 - k$$
$$\Leftrightarrow (b-c)(ab+bc+ca) = 2010 - k.$$

Mas $ab + bc + ca = 0$. Assim, $k = 2010$.

Problema 10. (OBM 1^a fase/2011) Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16 \times 20112007$?

a) 2×20112007^2

b) 2×20112003^2

c) 2×20112007

d) 2×20112003

e) 2×20112011^2

Solução. Para simplificar os cálculos, vamos escrever $a = 20112007$. Assim, a expressão desejada será

$$(a+4)^2 + (a-4)^2 - 16a = 2(a^2 - 8a + 16) = 2(a-4)^2 = 2 \times 20112007^2.$$

Letra A.

Problema 11. (IMO-Adaptado) Sejam k, m, n números naturais. Defina $c_s = s(s+1)$.

a) Fatore $c_j - c_k$, sendo $j \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que $(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)...(c_{m+n} - c_k)$ é divisível por $\dfrac{c_1 \cdot c_2 \cdot ... \cdot c_n}{n+1}$.

Problema 12. Determine todos os valores de x para os quais $(1999x - 99)^3 = (1234x - 56)^3 + (765x - 43)^3$.

Problema 13. Simplifique a expressão

$$S = \frac{2^2 - 1}{2^2} \times \frac{3^2 - 1}{3^2} \times \frac{4^2 - 1}{4^2} \times ... \times \frac{2012^2 - 1}{2012^2}.$$

Problema 14. Mostre que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Problema 15. Determine todas as soluções inteiras da equação

$$2(x+y) = xy + 7.$$

Dicas

11. Use o fato de que o produto de n inteiros consecutivos é divisível por $n!$.

12. Resolva a equação $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.

13. Fatore os numeradores, que são diferenças de quadrados.

14. Eleve ao cubo a expressão no lado esquerdo.

15. Encontre k tal que $xy - 2x - 2y + k$ possa ser fatorado.

Respostas

12. $\frac{99}{1999}, \frac{43}{65}, \frac{56}{1234}$.

13. $\frac{2013}{4024}$.

15. $\{(x,y) = (3,-1), (1,5), (5,1), (-1,3)\}$.