Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 14

Revisão - Parte II

Continuando nossa breve revisão de temas já abordados, propomos mais problemas de equações e sistemas de equações.

Problema 1. Se $x \in \mathbb{R}$ e $4y^2 + 4xy + x + 6 = 0$, determine:

a) o conjunto de todos os valores de x para os quais $y \in \mathbb{R}$;

b) y em função dos valores de x encontrados no item anterior.

Problema 2. Encontre todas as soluções reais da equação $\sqrt[4]{13+x} + \sqrt[4]{4-x} = 3$.

Problema 3. Determine o conjunto solução da equação $\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x}} - \sqrt{\dfrac{x}{x^2+3}} = \dfrac{3}{2}, x \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Sejam x, y, z números reais tais que

$$\frac{1}{xy} = \frac{y}{z-x+1} = \frac{2}{z+1}.$$

Prove que um desses números é a média aritmética dos outros dois.

Problema 5. Prove que a equação

$$a^n + 2012 \cdot b^n = c^{n+1}$$

tem infinitas soluções naturais a, b, c para todo inteiro positivo n.

Problema 6. (OBM) Mostre que a equação

$$x^3 + 1990y^3 = z^4$$

possui infinitas soluções inteiras com $x > 0, y > 0, z > 0$.

Problema 7. Determine o conjunto solução da equação $x = \lfloor 1-x \rfloor$, onde $\lfloor a \rfloor$ representa a parte inteira de a.

Problema 8. Quantas soluções reais possui o sistema $\begin{cases} \sqrt{x^2-y} & = & z-1 \\ \sqrt{y^2-z} & = & x-1 \\ \sqrt{z^2-x} & = & y-1 \end{cases}$?

Problema 9. (Banco IMO) Encontre todas as triplas de inteiros positivos x, y, z satisfazendo

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}.$$

Solução. Suponha, sem perda de generalidade, que $x \le y \le z$. Daí, $\dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \le \dfrac{3}{x}$, ou seja, $x \le 3$. Também $\dfrac{1}{x} < \dfrac{4}{5} \Rightarrow x \ge 2$. Assim, precisamos analisar os casos $x = 2$ e $x = 3$.

i) $x = 2$:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10} \Rightarrow y = \frac{10z}{3z-10}$$

$$\Rightarrow 3y = \frac{30z}{3z-10} = \frac{30z-100+100}{3z-10} = 10 + \frac{100}{3z-10}.$$

Como $3y \in \mathbb{Z}$, segue que $(3z-10)\big|100$ (essa notação significa $3z-10$ divide 100) e $3z-10>0$. Assim, temos as possibilidades

$$3z-10 = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.$$

Mas $z \in \mathbb{Z}$. Logo, restam

$$3z-10 = 2, 5, 20, 50$$
$$\Rightarrow z = 4, 5, 10, 20$$
$$\Rightarrow y = 20, 10, 5, 4,$$

que geram as soluções $(2,4,20), (2,5,10), (2,10,5), (2,20,4)$.

ii) $x = 3$:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{7}{15} \Rightarrow y = \frac{15z}{7z-15}$$

$$\Rightarrow 7y = \frac{105z}{7z-15} = \frac{105z-225+225}{7z-15} = 15 + \frac{225}{7z-15}.$$

Como $7y \in \mathbb{Z}$, segue que $(7z-15)\big|225$ e $7z-15>0$. Assim, temos as possibilidades

$$7z-15 = 1,3,5,15,45,75,225,$$
$$7z = 16,18,20,30,60,90,240,$$

que não produzem solução inteira.

Assim, as únicas soluções são $(2,4,20),(2,5,10),(2,10,5),(2,20,4)$.

Comentário. Existe um problema muito parecido com esse, proposto no livro das Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 1^a à 8^a, que possui o seguinte enunciado:

Mostre que o número de soluções x,y,z de inteiros positivos da equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1983}$$

é finito.

Tente resolvê-lo a partir das ideias do problema 9!

Problema 10. Determine todas as soluções em números reais x,y,z,w do sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + z = w \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{w} \end{cases}.$$

Problema 11. (Romênia) Os números reais não-nulos x,y,z,t verificam as seguintes igualdades

$$\begin{cases} x + y + z = t \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{t} \\ x^3+y^3+z^3=1000^3 \end{cases}.$$

Determine o valor da soma $x+y+z+t$.

Problema 12. Seja n um dado inteiro positivo. Quantas soluções existem em pares ordenados (x,y) de inteiros positivos para a equação

$$\frac{xy}{x+y}=n?$$

Solução. Primeiro reescrevemos a equação como

$$xy-nx-ny+n^2=n^2 \Leftrightarrow (x-n)(y-n)=n^2.$$

Portanto, a cada divisor positivo de n^2 corresponde um valor de $x - n$ e uma solução. Os divisores negativos sempre geram x ou y não-positivo.

Sendo $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$, temos $n^2 = p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \cdot ... \cdot p_k^{2a_k}$, que possui

$$(2a_1 + 1)(2a_2 + 1)...(2a_k + 1)$$

divisores positivos, que é a quantidade de soluções da equação inicial.

Problema 13. Determine todos os pares ordenados (m, n) de números inteiros positivos que são soluções da equação $\dfrac{4}{m} + \dfrac{2}{n} = 1$.

Problema 14. Os três números distintos a, b, c verificam as igualdades

$$\begin{cases} a^3 + pa + q & = & 0 \\ b^3 + pb + q & = & 0 \\ c^3 + pc + q & = & 0 \end{cases}.$$

Prove que $a + b + c = 0$.

Problema 15. (Czech and Slovak) Encontre todos os pares de inteiros a, b tais que a soma $a + b$ seja uma raiz da equação $x^2 + ax + b = 0$.

Dicas

1. Calcule o Δ da equação com variável em y e resolva a inequação $\Delta \geq 0$.

2. Eleve ao cubo a equação membro a membro.

3. Use a substituição $\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x}} = a$.

4. Combine os resultados das equações $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{y}{z-x+1}$ e $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{2}{z+1}$.

5. Comece procurando soluções em que $a = b$.

5. Repita a ideia do problema 5.

7. Observe que, se a equação possui solução, então $x \in \mathbb{Z}$.

8. Eleve as equações ao quadrado e lembre que raízes quadradas são não-negativas.

10. Passe z e $\dfrac{1}{z}$ para o lado direito da respectiva equação, equilibrando a quantidade de termos em cada membro das equações.

11. Mesma dica do problema 10.

13. Tome como base as ideias da questão 10.

14. Subtraia as equações 2 a 2.

15. Substitua $a + b$ na equação, calcule Δ e iguale-o a um quadrado perfeito.

Soluções e Respostas

1. a) $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$; b) $y = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 - x - 6}}{2}$.

2. 3 e -12.

3. Não há solução real.

4. $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{y}{z - x + 1} \Rightarrow xy^2 = z - x + 1$ e $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{2}{z+1} \Rightarrow z + 1 = 2xy$.

   Daí, $xy^2 + x = 2xy \Rightarrow x(y-1)^2 = 0$. Como $x \neq 0$, então $y = 1$. Portanto,

   $$z + y = z + 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{z+y}{2}.$$

5. Entenda inicialmente que o problema não exige que se encontre todas as soluções, mas apenas (pode não parecer a palavra mais adequada, mas pode ser ela sim!) que existem infinitas soluções.

   Comecemos buscando soluções em que $a = b$. A equação se tornaria $2013a^n = c^{n+1}$. Nesse caso, $a = c = 2013$ é solução, porém ainda não as conseguimos em quantidade infinita.

   Mas isso, agora, é fácil. Escolha $a = b = 2013k^{n+1}$ e $c = 2013k^n$. Variando k sobre $\mathbb{N}$, geramos as infinitas soluções pedidas.

7. Suponha que a equação possua solução. O lado direito da equação é um número inteiro. Assim, $x \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $x = 1 - x$, o que dá $x = \dfrac{1}{2}$, que não é um número inteiro, absurdo. Ou seja, não há solução para a equação.

8. Naturalmente, vamos elevar ao quadrado as 3 equações envolvidas. Somando os resultados, obtemos $x + y + z = 3$.

   Por outro lado, a partir da primeira equação, obtemos $z \geq 1$. Analogamente, $x \geq 1$ e $y \geq 1$ das demais equações, que geram $x + y + z \geq 3$.

   Portanto, as igualdades devem ocorrer e a única solução é $x = y = z = 1$.

10. As soluções são $x = -y, y = -z$ ou $z = -x$.

11. 2000.

13. $\dfrac{4}{m}+\dfrac{2}{n}=1 \Leftrightarrow (m-4)(n-2)=8$. As soluções inteiras positivas vêm de $m-4=1,2,4,8$ e $n-2=8,4,2,1$, respectivamente, ou seja, $(m,n)=(5,10),(6,6),(8,4),(12,3)$.

14. Subtraindo as 2 primeiras equações membro a membro, temos

$$(a-b)(a^2+ab+b^2+q)=0.$$

Como $a \neq b$, obtemos $a^2+ab+b^2+q=0$. Analogamente, $b^2+bc+c^2+q=0$.

Combinando esses 2 resultados (pela subtração), chegamos a $(a-c)(a+b+c)=0$. Mas $a \neq c$. Portanto, $a+b+c=0$.

15. Se $a+b$ é raiz, então

$$(a+b)^2+a(a+b)+b=0 \Rightarrow 2a^2+3ab+b^2+b=0,$$

cujo discriminante é

$$\Delta = b^2-8b=(b-4)^2-16,$$

que deve ser um quadrado perfeito, digamos $k^2, k \in \mathbb{Z}_+$, pois $a \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$(b-4)^2-k^2=16 \Leftrightarrow (b-4+k)(b-4-k)=16.$$

Lembrando que soma e diferença dos mesmos números inteiros têm a mesma paridade e que $b-4+k \geq b-4-k$ pois assumimos, sem perda de generalidade, que $k \geq 0$, temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{cases} b-4+k & = & 4, & 8, & -2, & -4 \\ b-4-k & = & 4, & 2, & -8, & -4 \end{cases},$$

que produzem as soluções $(a,b)=(-6,8),(-6,9),(0,-1),(0,0)$.