Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 15

A Ideia de Continuidade

Quando dizemos que um processo funciona de forma contínua, estamos dizendo que ele ocorre sem interrupção.

Da mesmo forma, em matemática, o conceito de continuidade em funções, por exemplo, significa que seu gráfico não tem interrupção. Os primeiros exemplos de funções contínuas são os polinômios, que são somas de parcelas do tipo $a_k x^k$, sendo k um número inteiro não-negativo, ou seja, funções do tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_n \neq 0,$$

sendo que, no ensino fundamental, sempre são estudadas as funções polinomiais de 1º e 2º graus, cujos gráficos são, respectivamente, retas e parábolas, ambos sem interrupção, isto é, contínuos, daí essas funções serem ditas contínuas.

A formalização do conceito de continuidade envolve noções de Cálculo - limite, especificamente - mas já é possível fazer muito sem formalidades. Por outro lado, precisamos assumir detalhes que não provaremos aqui nessas aulas. Por exemplo, a soma (e a diferença, portanto) e o produto de funções contínuas também são funções contínuas.

Às vezes, também, podemos considerar uma função contínua apenas em um determinado intervalo. Por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ possui uma *descontinuidade* em $x = 0$, mas é contínua para reais positivos.

Vejamos alguns exemplos.

Problema 1. Mostre que a equação $x^3 - 5x + 2 = 0$ possui uma raiz real positiva.

Solução. O lado esquerdo dessa equação é um polinômio, digamos $P(x)$, ou seja, podemos escrever $P(x) = x^3 - 5x + 2$.

Agora, veja que $P(0) = 2 > 0$ e $P(1) = -2 < 0$. Como o gráfico de P é contínuo, pois é um polinômio, ele une os pontos (0,2) e (1, -2) e, necessariamente, intercepta o eixo x entre 0 e 1, isto é, P possui uma raiz real entre 0 e 1.

Problema 2. Prove que a equação $x^5 + 8x^4 - 3x^2 - 4x - 2 = 0$ possui ao menos duas raízes reais negativas e uma positiva.

Problema 3. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Sabe-se que

$$h(-1) = 4, h(0) = 0, h(1) = 8.$$

Definimos g por $g(x) = h(x) - 2$. Mostre que a equação $g(x) = 0$ admite pelo menos 2 soluções distintas.

Problema 4. A equação

$$n^4 - 2n^3 + 3n^2 + n - 33 = 0$$

possui solução real positiva?

Problema 5. De uma função g contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

i. 1 é raiz de g;

ii. $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \dfrac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1; 3[$.

Problema 6. Prove que o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ intersecta o gráfico de $g(x) = 2x - 2$ em pelo menos um ponto do intervalo $]0, 1[$.

Problema 7. (Paulista) Demonstre que, no conjunto dos números reais, a equação

$$(x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b) = 0$$

sempre tem solução, quaisquer que sejam os números reais a, b, c dados.

Solução. Seja

$$P(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b).$$

Inicialmente, observe que se $a = b$ ou $b = c$ ou $c = a$, então P possui uma raiz (a, b ou c).

Caso a, b, c sejam distintos 2 a 2, podemos supor, sem perda de generalidade (devido à simetria da equação), $a < b < c$.

Assim, temos

$$P(a) = (a-b)(a-c) > 0,$$
$$P(b) = (b-a)(b-c) < 0,$$
$$P(c) = (c-a)(c-b) > 0,$$

que garantem uma raiz entre a e b e outra entre b e c.

Obs: Esta é uma solução envolvendo o conceito de continuidade dos polinômios. Tente resolvê-la calculando o Δ da equação do 2º grau.

Problema 8. (IME) Considere $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a < b < c$. Prove que a equação abaixo possui exatamente duas raízes x_1 e x_2 que satisfazem a condição $a < x_1 < b < x_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0.$$

Problema 9. Seja f uma função quadrática (função polinomial do 2º grau) tal que a equação $f(x) = x$ não tem soluções. Prove que a equação $f(f(x)) = x$ também não tem soluções.

Solução. Primeiramente, veja que a condição de $f(x) = x$, que é uma equação do 2º grau, não possuir raízes poderia nos levar a pensar em usar seu discriminante Δ. Porém, seria complicado aplicar tal resultado na equação $f(f(x)) = x$, que é do 4º grau.

Pensemos, então, com nossos argumentos de continuidade, já que f é contínua pois seu gráfico (uma parábola) não possui interrupção. Para simplificar um pouco nossa solução, vamos criar a função $g(x) = f(x) - x$, que também é contínua utilizando um resultado (que não iremos provar) que garante que soma de funções contínuas também é uma função contínua.

Assim, a condição do problema que garante que $f(x) = x$ não possui solução é equivalente a dizer que g não possui raiz real, ou seja, seu gráfico está todo acima do eixo x ou todo abaixo, devido à continuidade.

Sem perda de generalidade (o outro caso é análogo), vamos supor que o gráfico de g esteja todo acima do eixo x, isto é, $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Da mesma forma, também temos $f(f(x)) > f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Finalmente, combinando esses 2 resultados, concluímos que $f(f(x)) > x, \forall x \in \mathbb{R}$ (ou $f(f(x)) < x, \forall x \in \mathbb{R}$), garantindo que $f(f(x)) = x$ não possui solução real.

Obs. A função em questão poderia ser qualquer função contínua.

Problema 10. Seja f uma função contínua para todo x real tal que a equação $f(x) = x$ não possui solução. Prove que $\underbrace{f(f...f}_{n}(x)...) = x$ também não possui solução, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 11. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sendo $f(2004) = 2003$, determine $f(1999)$.

Solução. Vários alunos iniciam esse problema substituindo $f(x)$ por y, obtêm $f(y) = \frac{1}{y}$ e, portanto, $f(1999) = \frac{1}{1999}$, que é a resposta correta.

Mas como explicar que $f(2004)$ não é $\frac{1}{2004}$ e, sim, 2003?

A resposta está no fato de nem todo número (y, no caso) poder ser escrito como $f(x)$. Isso só é verdade se y está no conjunto imagem da função. Por exemplo, 2003 é imagem de 2004 e isso é suficiente para garantir que $f(2003) = \frac{1}{2003}$ e, portanto, $\frac{1}{2003}$ também está no conjunto imagem e $f\left(\frac{1}{2003}\right) = 2003$.

Sendo assim, nosso objetivo é conseguir mostrar que 1999 está no conjunto imagem dessa função. No parágrafo anterior, vimos que o gráfico de f passa pelos pontos $\left(2003, \frac{1}{2003}\right)$ e $\left(\frac{1}{2003}, 2003\right)$. A continuidade de f garante que seu gráfico percorrerá pontos com ordenadas (coordenadas y) desde $\frac{1}{2003}$ até 2003, ou seja, vai passar por um com ordenada 1999, o que significa dizer que 1999 está no conjunto imagem de f. Logo, $f(1999) = \frac{1}{1999}$.

Obs: Para uma melhor compreensão, faça um esboço no plano cartesiano dos dados encontrados nessa solução.

Problema 12. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se $f(2011) = 2010$, mostre que 2012 não pertence ao conjunto imagem de f, ou seja, não existe x real tal que $f(x) = 2012$.

Problema 13. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Solução. Vamos criar a função $h(x) = f(x) - g(x)$, também contínua. Pelo problema,

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0,$$

$$h(b) = f(b) - g(b) > 0.$$

A continuidade de h garante que existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, $f(c) = g(c)$.

Problema 14. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua (pois é a diferença entre funções contínuas). Prove que f tem um ponto fixo, isto é, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. (Sugestão: considere a função $g(x) = f(x) - x$.)

Dicas

2. Sendo $P(x) = x^5 + 8x^4 - 3x^2 - 4x - 2$, calcule $P(0)$, $P(-1)$. Mostre que P assume apenas valores negativos quando x diminui suficientemente. Depois, calcule $P(1)$.

3. Calcule $g(-1), g(0), g(1)$.

4. Sendo $P(n) = n^4 - 2n^3 + 3n^2 + n - 33$, calcule $P(0), P(1), P(2), P(3)$.

5. Escreva $f(x) = 2g(x) - g(3)$. Calcule $f(1)$ e $f(3)$.

6. Escreva $h(x) = f(x) - g(x)$ e calcule $h(0)$ e $h(1)$.

8. Veja solução do problema 7.

10. Veja solução do problema 9.

12. Veja solução do problema 11.

14. Veja solução do problema 13.

Soluções

2. Sendo $P(x) = x^5 + 8x^4 - 3x^2 - 4x - 2$, então $P(0) = -2$ e $P(-1) = 6$. Assim, já existe uma raiz negativa no intervalo $(-1, 0)$. Quem *controla* o sinal de P quando x *caminha* para $-\infty$ é o termo x^5, que é negativo nesse caso. Daí, partindo de um valor positivo $P(-1) = 6$, o gráfico, quando x *caminha* para $-\infty$, cortará novamente o eixo x gerando uma nova raiz negativa. Além disso, $P(1) = 0$, ou seja, 1 é uma raiz positiva.

3. $g(-1) = h(-1) - 2 = 2, g(0) = h(0) - 2 = -2, g(1) = h(1) - 2 = 6$, ou seja, existe uma raiz no intervalo $(-1, 0)$ e outra no intervalo $(0, 1)$.

4. $P(2) = -19, P(3) = 24$ e continuidade garantem que existe uma raiz no intervalo $(2, 3)$.

5. Sendo $f(x) = 2g(x) - g(3)$, temos $f(1) = 2g(1) - g(3) = -g(3) < 0$ e $f(3) = 2g(3) - g(3) = g(3) > 0$, ou seja, existe uma raiz no intervalo $(1, 3)$.

6. Seja $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$. Como $h(0) = 3$ e $h(1) = -1$ e h é contínua, segue que h possui uma raiz em $(0, 1)$, isto é, os gráficos de f e g se intersectam em pelo menos um ponto desse intervalo.

12. Pela solução do problema 11, temos que $f(2010) = \dfrac{1}{2010}$ e $f\left(\dfrac{1}{2010}\right) = 2010$, ou seja, 2010 está no conjunto imagem de f. Se 2012 também estivesse, então a continuidade de f garantiria que 2011 também estaria e, portanto, $f(2011) = \dfrac{1}{2011}$, absurdo.

14. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, então não há nada a fazer. Caso contrário, temos $f(a) > a$ e $f(b) < b$. O resultado segue análogo ao encontrado na solução do problema 13 criando a função $h(x) = f(x) - x$.