Polos Olímpicos de Treinamento
Curso de Álgebra - Nível 2
Prof. Marcelo Mendes

Aula 16

Números Complexos - Parte I

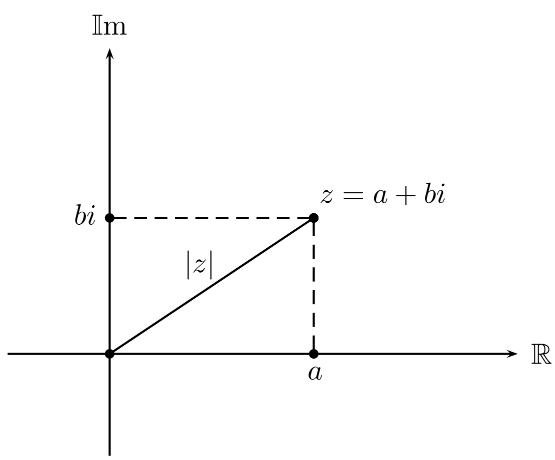
Introdução e Forma Algébrica

São as expressões da forma $a + bi$, em que a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$ (i é a primeira letra da palavra imaginário, sinônimo de número complexo) ou $i^2 = -1$. Dizemos que $z = a + bi$ é forma algébrica do número complexo z.

Os números complexos da forma $a + 0i$ são chamados números reais. Assim, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Os números complexos da forma $0 + bi$ são chamados números *imaginários puros*. Em particular, $0 + 1i = i$ é chamado de *unidade imaginária*.

Interpretação Geométrica dos Números Complexos



A figura acima mostra um número complexo no plano, que chamaremos de plano complexo. Nele, o eixo horizontal contém números reais e o eixo vertical, números imaginários puros. A distância de z à origem é o módulo de z (assim como acontece com os números reais) e representamos da maneira usual, ou seja, $|z|$. Observe que existe uma associação entre a notação cartesiana de um ponto (x, y) e a notação complexa do número $x + yi$.

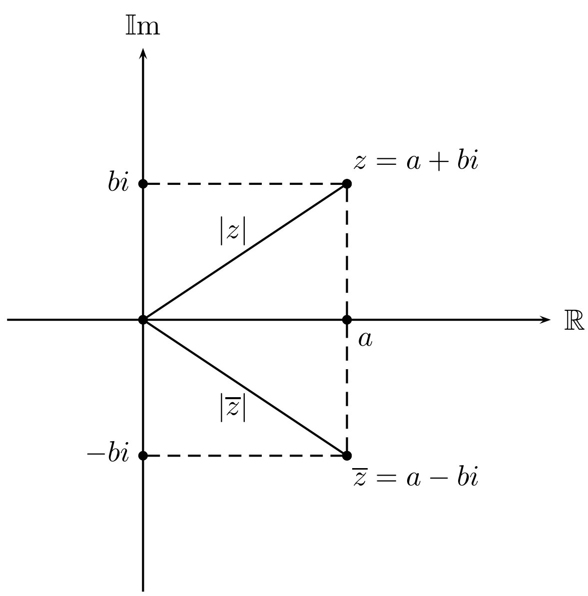
Operações

1. Igualdade: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$. (Observação: Não há comparação dos tipos $>, <, \geq, \leq$)
2. Soma: $a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$.
3. Produto: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
4. Quociente: $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$.
5. Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Potências do i

As potências de i são periódicas. De fato, $i^1 = i$ $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ... A repetição ocorre a cada 4 potências (o período da repetição é 4.) Também é comum precisar calcular potências de $1+i$ ou $1-i$. É só usar que $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$.

O Conjugado e suas Propriedades



O conjugado $\overline{z}$ número complexo $z = a + bi$ é, por definição, o número complexo $\overline{z} = a - bi$. Vejamos algumas propriedades úteis.

1. O conjugado do número complexo $\overline{z}$ é z e, por isso, z e $\overline{z}$ são mutuamente conjugados.

2. $|\overline{z}| = |z|$, pois cada lado da igualdade é $\sqrt{a^2+b^2}$.

3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, já que $a+bi = a-bi$ implica $b=0$. Esse fato deve ser usado quando o objetivo for provar que um determinado número é real.

4. $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z$ é um número imaginário puro, pois $a+bi = -(a-bi)$ implica $a=0$. Esse fato deve ser usado quando o objetivo for provar que um determinado número é imaginário puro.

5. $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$, pois $z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$. ESSA É UMA PROPRIEDADES MAIS ÚTEIS, pois consegue eliminar o módulo dos cálculos, algo bom mesmo que os números envolvidos sejam reais.

6. A soma $((a+bi)+(a-bi) = 2a)$ e o produto (visto no item anterior) de números mutuamente conjugados é um número real.

7. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$. De fato, $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)} = (a_1+a_2)-i(b_1+b_2) = (a_1-ib_1)+(a_2-ib_2) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ (Esse fato já foi uma questão proposta pelo IME).

8. $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

9. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Tente verificar esses dois últimos itens fazendo $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$. Vejamos agora alguns exemplos.

Problema 1. Calcule i^{2011}, i^{2012}, i^{2013}.

Problema 2. Calcule o valor de $i^{8n+3}+i^{4n+1}$.

Problema 3. Calcule $(1+i)^{2011}$, $(1-i)^{2012}$, $(1+i)^{2013}$.

Problema 4. Encontre todas as raízes da equação $z^3 = 1$.

Solução. A equação pode ser reescrita como

$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0.$$

A primeira raiz $z=1$ vem de $z-1=0$. As demais vêm de $z^2+z+1=0$, cujo discriminante é $\Delta = -3$. Logo, essas últimas duas raízes são $\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Problema 5. Encontre as raízes das equações

a) $z^3 = 8$;

b) $z^4 = 81$.

Problema 6. Encontre números reais x, y, u, v satisfazendo

$$z = x + i, w = 3 + iy,$$

$$z + w = u - i, zw = 14 + iv.$$

Problema 7. Seja $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Encontre condições sobre a e b para que:

a) z^3 seja real;

b) z^3 seja imaginário puro.

Solução. Veja:

$$z = a + bi \Rightarrow z^3 = (a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3$$

$$\Rightarrow z^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3).$$

a) z^3 é real se, e somente se, sua parte imaginária é nula, ou seja, $3a^2b - b^3 = 0$, o que ocorre quando $b = 0$ ou $b = \pm a\sqrt{3}$.

b) z^3 é imaginário puro se, e somente se, sua parte real é nula, ou seja, $a^3 - 3ab^2 = 0$, o que ocorre quando $a = 0$ ou $a = \pm b\sqrt{3}$.

Problema 8. Para $z \in \mathbb{C}$, prove que

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

Problema 9. Prove que $|1 + iz| = |1 - iz|$ se, e somente se, z é um número real.

Solução. Sabendo que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, temos

$$\begin{gathered} |1 + iz| = |1 - iz| \Leftrightarrow |1 + iz|^2 = |1 - iz|^2 \\ \Leftrightarrow (1 + iz)\overline{(1 + iz)} = (1 - iz)\overline{(1 - iz)} \\ \Leftrightarrow (1 + iz)(1 - i\overline{z}) = (1 - iz)(1 + i\overline{z}) \\ \Leftrightarrow 1 + iz - i\overline{z} + |z|^2 = 1 - iz + i\overline{z} + |z|^2 \\ \Leftrightarrow iz = i\overline{z} \Leftrightarrow z = \overline{z}, \end{gathered}$$

que é a condição necessária e suficiente para z ser real.

Problema 10. Sejam a e b números reais. Se $a + bi \neq 0$, determine a forma algébrica do número $\dfrac{1}{a+bi}$.

Solução. A ideia de tornar o denominador real é sempre utilizar o conjugado, parecido com o que fazemos quando queremos racionalizar um denominador irracional:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2+b^2},$$

que é a forma algébrica desejada.

Problema 11. (ITA) Seja $z = a + bi$ um número complexo. Se $z + \dfrac{1}{z}$ é um número real, então mostre que $b = 0$ ou $|z| = 1$.

Problema 12. (ITA) Se z_1 e z_2 são números complexos e $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ são ambos reais, então mostre que z_1 e z_2 são ambos reais ou $z_1 = \overline{z}$.

Dicas

5. Veja a solução da questão 3.

6. Use que a igualdade entre números complexos, ou seja,$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$, se a, b, c, d são reais.

8. Use $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

11. Use o problema 10.

12. Escreva z_1 e z_2 em suas formas algébricas, ou seja, $z_1 = a + bi$ e $z_2 + c + di$, sendo a, b, c, d números reais.

Respostas e Soluções

1. $-i$, 1, i.

2. 0.

3. $(1+i)^{2011} = (1+i)^{2010}(1+i) = (2i)^{1005}(1+i) = 2^{1005}i^{1004}i(1+i) = 2^{1005}(i-1)$.
   $(1-i)^{2012} = (-2i)^{1006} = (-2)^{1006}i^{1004}i^2 = -2^{1006}$.
   $(1+i)^{2013} = (1+i)^{2011}(1+i)^2 = 2^{1005}(i-1)2i = -2^{1006}(1+i)$.

1. a) 2, $1 \pm \sqrt{3}$.
   b) ± 3, $\pm 3i$.

6. $x = 4$, $y = -2$, $u = 7$ e $v = -5$.

8. Sabendo que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, temos

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{z}z = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

11. $z + \dfrac{1}{z} = a + bi + \dfrac{a}{a^2+b^2} + i \cdot \dfrac{-b}{a^2+b^2}$ será real se $b - \dfrac{b}{a^2+b^2} = \dfrac{b(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2} = 0$, ou seja, $b = 0$ ou $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$.

12. Escrevendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 + c + di$, temos $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$ e $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Como esses números são reais, devemos ter:

    1. $b + d = 0 \Leftrightarrow b = -d$;
    2. $ad + bc = 0 \Leftrightarrow ad = -bc$.

    Se $d = 0$, então $b = 0$. Daí, z_1 e z_2 são reais. Se $d \neq 0$, então podemos fazer o cancelamento na equação do item 1 e achar $a = c$. Isso mostra que z_1 e z_2 são conjugados complexos.