Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

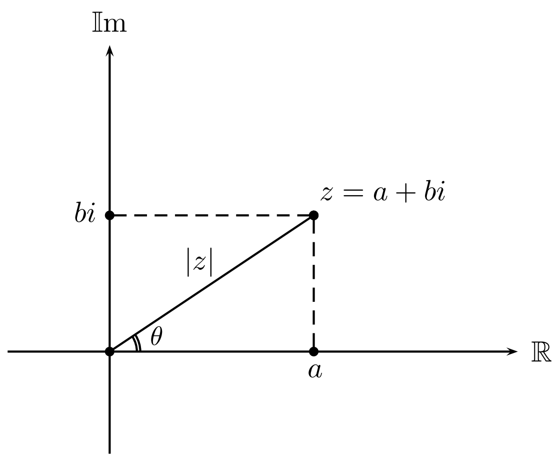
Prof. Marcelo Mendes

Aula 17

Números Complexos - Parte II

Vamos finalizar nosso estudo dos números complexos apresentando a forma de escrevê-los com o auxílio da Trigonometria, que dará suporte a mais teoria posterior, e mais exercícios.

Forma Trigonométrica



A figura acima nos permite escrever $cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ e $sen\theta = \dfrac{b}{|z|}$. Assim, temos

$$z = a + ib = |z|cos\theta + i|z|sen\theta,$$

ou seja,

$$z = |z|(cos\theta + isen\theta).$$

O ângulo θ é chamado de *argumento* do número complexo z e o denotamos por $\arg z$. Completando as propriedades do conjugado, temos $\arg \overline{z} = 360^o - \arg z$.

Problema 1. Escreva os seguintes números na forma trigonométrica.

a) 2.

b) $3i$.

c) $1+i$.

d) $1+i\sqrt{3}$.

Solução.

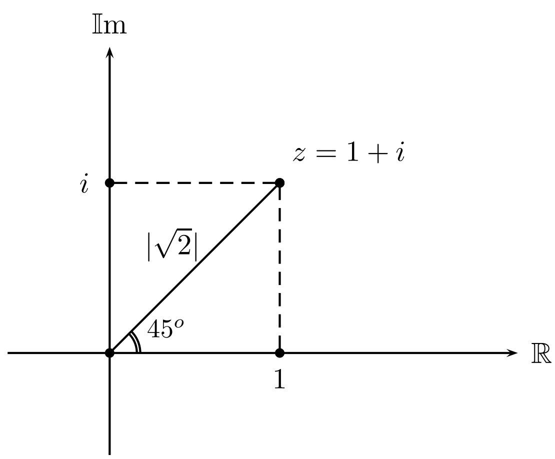
a) $2 = 2(cos0 + isen0)$.

b) $3i = 3(cos90^o + isen90^o)$.

c) $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(cos45^o + isen45^o)$.

d) $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(cos60^o + isen60^o)$.

Para ilustrar o item c) dessa questão, observe a figura a seguir.



Após localizar o número $1+i$ no plano complexo, visualizamos um quadrado de lado 1. Assi, fica mais fácil enxergar que o argumento de z é 45^o e que o módulo é $\sqrt{2}$.

Problema 2. Determine o polinômio de menor grau e com coeficientes reais que possui um número complexo com módulo 1 e argumento $\frac{2\pi}{3}$ como raiz.

Problema 3. Sejam $x = a+b$, $y = a\omega + b\omega^2$, $z = a\omega^2 + b\omega$, onde $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Calcule $x+y+z$ e expresse $x^3+y^3+z^3$ em termos de a e b.

Problema 4. (EUA) O número complexo z satisfaz $z + |z| = 2 + 8i$. Calcule $|z|^2$.

Solução. Supondo $z = a + bi$, a equação fica

$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i.$$

A igualdade entre números complexos nos garante que $b = 8$ (comparando as partes imaginárias dos lados da equação) e $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ (comparando as partes reais dos lados da equação), ou seja,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2 - a \geq 0 \Rightarrow a = -15.$$

Portanto, $z = -15 + 8i$ é a única solução e $|z|^2 = 15^2 + 8^2 = 289$.

Problema 5. (IME) Dois números complexos z_1 e z_2, não-nulos, são tais que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. Mostre que $\dfrac{z_2}{z_1}$ é imaginário puro.

Problema 6. (IME) Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9.$$

Problema 7. (ITA) Determine todos os números complexos z, que são raízes da equação $|z| - z = 1 + 2i$, sendo i a unidade imaginária.

Problema 8. (ITA) Considerando z e w números complexos arbitrários e $u = z \cdot w + \overline{z} \cdot \overline{w}$, mostre que o conjugado de u é igual ao dobro da parte real do número $z \cdot w$.

Problema 9. (ITA) Determine o valor da expressão $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$, sendo z um número complexo unitário.

Problema 10. (ITA) Determine o produto dos números complexos $z = x + yi$ que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e tais que $y = 2x - 1$.

Solução. $|z|^2 = 2 \Rightarrow x^2 + (2x - 1)^2 = 2 \Rightarrow 5x^2 - 4x - 1 = 0$, cujas raízes são $x = 1$ e $x = -\dfrac{1}{5}$.

Assim, os números são $1 + i$ e $-\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i$, cujo produto é $\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i$.

Problema 11. (ITA) Mostre que, resolvendo a equação $z^2 = \overline{2+z}$ no conjunto dos números complexos, todas as raízes são números inteiros.

Problema 12. (ITA) Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo $(x+iy)^2 = (x+y)i$. Mostre que x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$.

Solução. $(x+iy)^2 = (x+y)i \Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = (x+y)i$. Pela igualdade entre números complexos, temos $x^2 - y^2 = 0$, o que dá $x = y$ ou $x = -y$.

Se $x = -y$, então $x + y = 0$ e $2xy = 0$, absurdo pois $x \neq 0$.

Logo, $x = y$ e $2xy = x + y$ equivale a $x^2 = x$. Assim, $x = 1$, que é uma raiz da equação dada.

Problema 13. Resolva a equação $(z+i)^2 + (z-i)^2 = 2$.

Problema 14. (ITA) Escreva as formas algébrica e trigonométrica da potência $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$.

Dicas

2. Esse número é $z = cos120^o + isen120^o = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Mostre que $\omega^3 = 1$ e use esse resultado.
5. Use $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
6. Tome $z = i$, que tem módulo unitário e encontre valores para a, b e c.
7. Escreva $z = a + bi$, com a e b reais.
8. Use $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$ e escreva $zw = a + bi$, com a e b reais.
9. Use $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$.
11. Escreva $z = a + bi$, com a e b reais.
14. Use $(1 + i)^2 = 2i$.

Respostas e Soluções

2. $P(z) = z^2 + z + 1$.

3. $x+y+z = a(1+\omega+\omega^2)+b(1+\omega+\omega^2) = 0$. Assim, $x^3+y^3+z^3 = 3xyz = 3(a^3+b^3)$ pois

$$\begin{aligned} xyz &= (a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega) \\ &= (a+b)(a^2+b^2+ab(\omega^4+\omega^2)) \\ &= (a+b)(a^2+b^2-ab) = a^3+b^3, \end{aligned}$$

visto que $\omega^4 = \omega$ pois $\omega^3 - 1 = (\omega-1)(\omega^2+\omega+1) = 0$.

Outra forma de calcular $x^3+y^3+z^3$ é elevar ao cubo as expressões de x, y, z e, depois, somar os resultados.

5. $|z_1+z_2| = |z_1-z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 = |z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$ $(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1} = 0 \Leftrightarrow$

6. Tomando $z = i$, que tem módulo 1, uma possível solução é $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$ (P.A.), como pedido no enunciado (não foi pedido encontrar todas as soluções).

7. Fazendo $z = a+bi$, temos $\sqrt{a^2+b^2} - a - bi = 1+2i$. A igualdade entre números complexos nos dá $b = -2$ e

$$\sqrt{a^2+4} = a+1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Logo, $z = \frac{3}{2} - 2i$ é a única solução.

8. $\overline{u} = u$. Se $zw = a+bi$, então $u = 2a$.

9. $|1-z|^2 + |1+z|^2 = (1-z)(1-\overline{z}) + (1+z)(1+\overline{z}) = 2+2|z|^2 = 4$.

11. Fazendo $z = a+bi$, temos $a^2+b^2 = 2+a-bi$. A igualdade entre números complexos garante que $b = 0$ e que $a^2 = 2+a$, cujas raízes são 2 e -1.

13. $z = \pm\sqrt{2}$.

14. $\sqrt{2}^{93} = \sqrt{2}^{92}\sqrt{2} = 2^{46}\sqrt{2}$.

$(1+i)^{93} = (1+i)^{92}(1+i) = (2i)^{46}(1+i) = -2^{46}(1+i)$

Assim, $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93} = -\frac{\sqrt{2}}{1+i} = -\frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = cos315^o + isen315^o$.