Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 18

Relações de Girard - Parte I

Ao estudar as equações (polinomiais) do 2º grau, você deve ter aprendido que é possível calcular a soma e o produto das raízes, mesmo sem conhecê-las. Vamos recordar essas fórmulas.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Assim, podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Igualando os coeficientes de termos de mesmo grau, obtemos $b = -a(x_1 + x_2)$ e $c = ax_1x_2$, ou seja,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Agora, não pense mais em soma e produto das raízes e, sim, que são somas das raízes separadamente e, depois, aos pares. Para um conjunto de 3 raízes, por exemplo, a soma delas separadamente seria $x_1 + x_2 + x_3$ e, aos pares, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$. Além disso, ainda haveria a soma delas de 3 em 3: $x_1x_2x_3$, que, nesse caso, coincide com o produto.

Com essas expressões e repetindo os cálculos acima para uma equação $ax^3+bx^2+cx+d = 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3, obtemos

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

E isso pode ser extendido para equações polinomiais de qualquer grau, sempre dividindo pelo primeiro coeficiente, que é sempre diferente de zero, e fazendo alternância de sinais.

Tais resultados são conhecidos como *Relações de Girard* (Albert Girard (1590 - 1639)).

Por exemplo, se a equação for $2x^4 + 3x^2 + 8x + 1 = 0$, então

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{3}{2},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{8}{2} = -4,$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{2}.$$

Problema 1. Determine uma equação do 3º grau cujas raízes sejam 1, 2 e 3.

Solução. O resultado é imediato escrevendo

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Mas também podemos criar os coeficientes da equação através das Relações de Girard. Sendo $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ uma equação (pois podemos multiplicá-la por qualquer valor não-nulo sem que suas raízes sejam alteradas) procurada (os sinais nos coeficientes estão alternados pelo padrão das Relações de Girard). Assim:

$$a = 1 + 2 + 3 = 6,$$

$$b = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 11,$$

$$c = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

obtendo assim a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Problema 2. Resolva a equação polinomial $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ sabendo que uma de suas raízes é 1.

Solução. Sejam $1, r, s$ as raízes dessa equação. Assim, por Girard, temos:

$$1 + r + s = -4,$$

$$1 \cdot r \cdot s = 6,$$

ou seja,

$$r + s = -5,$$

$$rs = 6,$$

donde $r = -2$ e $s = -3$.

Problema 3. (EUA) Para quantos inteiros positivos n entre 1 e 100 é possível fatorar $x^2 + x - n$ como produto de dois fatores lineares com coeficientes inteiros?

Problema 4. (ITA) Se a, b, c são as raízes da equação $x^3 - 2x^3 + x - 4 = 0$, determine o valor de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

Problema 5. (ITA) As raízes da equação $x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, com $q, r, s, t \in \mathbb{Q}_+^*$, são L, M, N, P. Determine o valor de

$$\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}.$$

Problema 6. (IME) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m - 15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

Problema 7. Os três números distintos a, b, c verificam as igualdades

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^3 + pa + q & = & 0 \\ b^3 + pb + q & = & 0 \\ c^3 + pc + q & = & 0 \end{array} \right. .$$

Prove que $a + b + c = 0$.

Solução. As relações dadas significam que a, b e c são as raízes da equação polinomial do 3º grau $x^3 + px + q = 0$, que, por Girard, tem soma das raízes igual a 0, isto é, $a + b + c = 0$.

Problema 8. Sejam $m, n, k \in \mathbb{Q}$ as raízes de $t^3 + at + b$. Prove que as raízes de $mt^2 + nt + k$ também são racionais.

Solução. Observe que não existe o termo do 2º grau em $t^3 + at + b$. Assim, por Girard, temos que $m + n + k = 0$. Ora, mas isso mostra que 1 é uma raiz de $mt^2 + nt + k$.

Novamente, Girard, através do produto das raízes, nos dá que a outra raiz é $\dfrac{k}{m}$, que é racional por ser quociente de racionais. Isso mostra que as 2 raízes de $mt^2 + nt + k$ são racionais.

Problema 9. (ITA) As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Determine o valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

Problema 10. Determine o valor da soma $a + b$ para que as raízes do polinômio

$$4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$$

estejam em progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{2}$.

Solução. Sejam r, $r + \frac{1}{2}$, $r + 1$, $r + \frac{3}{2}$ as raízes da equação. Daí,

$$r + r + \frac{1}{2} + r + 1 + r + \frac{3}{2} = -\frac{-20}{4} = 5 \Rightarrow r = \frac{1}{2},$$

ou seja, as raízes são $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ e 2. Por Girard, temos:

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{35}{4} \Rightarrow a = 35,$$

$$\frac{b}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{6}{4} \Rightarrow b = 6.$$

Portanto, $a + b = 41$.

Dicas

3. Chame as raízes de a e b. Em seguida, utilize Relações de Girard.

4. Reduza a soma das frações a um denominador comum (o que se chama comumente de 'tirar o mínimo'. Mas nem sempre o mmc é o produto, além de só ser definido para naturais). Em seguida, use Girard.

5. Reduza a soma das frações a um denominador comum. Em seguida, use Girard.

6. Além das Relações de Girard, é interessante conseguir utilizar a identidade

$$xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1).$$

9. Denote as raízes por $n - 1$, n, $n + 1$. Em seguida, use a dica do enunciado e Girard.

Respostas e Soluções

3. Ao expressarmos $x^2 + x - n$ como produto de dois fatores lineares com coeficientes inteiros, os fatores serão $(x - a)$ e $(x - b)$, com a e b inteiros. Por Girard, temos

$$a + b = -1,$$
$$ab = -n.$$

Assim, precisamos encontrar n tal que $a(a + 1) = n$, $1 < n < 100$. As possibilidades são $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, que dão, respectivamente, $n = 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90$. Portanto, o resultado é possível para 9 valores de n.

4. Por Girard, temos que $ab + bc + ca = 1$ e $abc = 4$. Logo,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{4}.$$

5. Manipulando a equação e utilizando as Relações de Girard, temos

$$\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN} = \frac{L^2 + M^2 + N^2 + P^2}{LMNP}$$
$$= \frac{(L + M + N + P)^2 - 2(LM + LN + LP + MN + MP + NP)}{LMNP}$$
$$= \frac{q^2 - 2r}{t}.$$

6. As Relações de Girard nos dão $x_1 + x_2 = 15 - m$ e $x_1x_2 = m$. Portanto, soluções (x_1, x_2) e (x_2, x_1) dão o mesmo resultado (valor de m) e

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 16.$$

Daí, temos as possibilidades

$$\begin{cases} x_1 + 1 & = & 1, 2, 4, -4, -2, -1 \\ x_2 + 1 & = & 16, 8, 4, -4, -8, -16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & 0, 1, 3, -5, -3, -2 \\ x_2 & = & 15, 7, 3, -5, -9, -17 \end{cases},$$

que dão os seguintes possíveis valores para $m = x_1x_2$: 0, 7, 9, 25, 27, 34.

9. Sejam $n-1$, n e $n+1$ as raízes dessa equação. Assim,

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 14 \Leftrightarrow 3n^2 + 2 = 14 \Leftrightarrow n = 2.$$

Pelas Relações de Girard, temos

$$1 + 2 + 3 = -a \Rightarrow a = -6,$$
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = b \Rightarrow 11,$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 = -c \Rightarrow c = -6.$$

Logo,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6^2 + 12^2 + 6^2 = 36 + 121 + 36 = 193.$$