Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 19

Relações de Girard - Parte II

Vamos continuar vendo mais exemplos das Relações de Girard. Veremos também um resultado novo que relaciona esse assunto com números complexos.

Problema 1. (ITA) Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2 (ou seja, as raízes são x_1, x_1 e x_2), distinta de x_1. Determine o valor de $(k + x_1)x_2$.

Solução. Vamos utilizar as Relações de Girard para soma e soma aos pares:

$$x_1 + x_1 + x_2 = 2x_1 + x_2 = -\frac{7}{2},$$
$$x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 = \frac{4}{2} = 2.$$

Eliminando x_2, obtemos:

$$3x_1^2 + 7x_1 + 2 = 0,$$

cuja raiz inteira é $x_1 = -1$. Assim, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$ e, portanto,

$$x_1x_1x_2 = -\frac{3}{2} = -\frac{k}{2} \Rightarrow k = 3.$$

Problema 2. Mostrar que $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ é divisível por $(x-1)$ mas não é divisível por $(x-1)^2$.

Solução. Veja que $f(1) = 1+1-10+8 = 0$, o que mostra que $f(x)$ possui um fator $(x-1)$.

Agora, suponha que $f(x)$ seja divisível por $(x-1)^2$. Isto significaria que f possui 1 como raiz dupla. Suponha, então, que as raízes sejam 1, 1 e r. Por Girard, temos

$$1 + 1 + r = -1 \Rightarrow r = -3,$$
$$1 \cdot 1 \cdot r = -8 \Rightarrow r = -8,$$

um absurdo. Logo, f não é divisível por $(x-1)^2$.

Problema 3. Verifique se a equação $x^3 - 3x + 8 = 0$ tem raízes iguais.

Problema 4. Determinar m para que a equação $x^3 - 7x + m = 0$ tenha uma raiz igual ao dobro de uma outra.

Problema 5. (IME) Seja

$$p(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as cinco raízes de $p(x)$ são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. Determine o número de coeficientes pares de $p(x)$.

Problema 6. (OCM) Considere todas as retas que encontram o gráfico da função

$$f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$$

em quatro pontos distintos, digamos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Mostre que o valor de $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ é independente da reta e ache esse valor.

Solução. Seja $y = ax + b$ a equação de uma dessas retas que cortam o gráfico de f em 4 pontos distintos. Queremos resolver a equação $f(x) = y$, ou seja:

$$2x^4 + 7x^3 + 3x - 5 = ax + b \Leftrightarrow 2x^4 + 7x^3 + (3-a)x - b - 5 = 0.$$

Por Girard, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{7}{2}$ e, portanto,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = -\frac{7}{8},$$

que independe da reta pois não varia com os valores de a ou b. A chave dessa ideia funcionar é que os coeficientes de f que dão a soma (os dois primeiros) não foram afetados por a ou b.

Problema 7. (IME) Determine o valor da soma das raízes da equação

$$y^{\frac{3}{2}} + 5y + 2y^{\frac{1}{2}} + 8 = 0.$$

Problema 8. São dados $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabe-se que

$$a + b + c > 0,$$

$$bc + ca + ab > 0,$$

$$abc > 0.$$

Prove que $a > 0, b > 0, c > 0$.

Solução. Seja $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ a equação cuja raízes são a, b, c. Por Girard, temos

$$A = a + b + c \Rightarrow A > 0,$$

$$B = ab + bc + ca \Rightarrow B > 0,$$

$$C = abc \Rightarrow C > 0.$$

Suponha que $a > 0, b > 0, c > 0$ não ocorra, ou seja, existe uma raiz $r \leq 0$. Mas

$$\underbrace{r^3}_{\leq 0} - \underbrace{Ar^2}_{\geq 0} + \underbrace{Br}_{\leq 0} - \underbrace{C}_{>0}$$

seria negativo, contrariando o fato de r ser raiz. Portanto, $a > 0, b > 0, c > 0$.

Problema 9. Suponha que $t^3 + pt + q = 0$ tenha uma raiz não real $a + bi$, sendo a, b, p, q todos reais e $q \neq 0$. Mostre que $aq > 0$.

Solução. Vamos iniciar com o seguinte

Teorema (das Raízes Complexas). Se uma equação polinomial com coeficientes reais possui uma raiz complexa $z = a + bi$ $(b \neq 0)$, então $\overline{z} = a - bi$ também é uma raiz dessa equação.

Demonstração. Uma equação polinomial é da forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0.(*)$$

Se z é uma raiz dessa equação, significa que

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0.$$

A igualdade acima garante que também vale a igualdade entre os conjugados. Utilizando as propriedades vistas a respeito dos números complexos, temos

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n}\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{z^{n-1}} + ... + \overline{a_1}\overline{z} + \overline{a_0} = 0$$

$$\Rightarrow a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + ... + a_1\overline{z} + a_0 = 0,$$

onde a condição de os coeficientes serem reais foi usada pois o conjugado de um número real é esse próprio número. A última equação garante que $\overline{z}$ também é raiz de (*). □

Voltando ao problema, temos as condições do teorema acima, uma vez que 1, 0, p, q são reais. Logo, $a - bi$ também é uma raiz. Seja r a terceira raiz. Por Girard, temos soma 0, ou seja

$$a + bi + a - bi + r = 0,$$

que mostra que $r = -2a$ é a terceira raiz. Agora, pelo produto

$$(a + bi)(a - bi)(-2a) = -q \Leftrightarrow 2a(a^2 + b^2) = q,$$

temos que a e q têm o mesmo sinal. Além disso, $q \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$. Portanto, $aq > 0$.

Problema 10. (OCM) Mostre que 1 é a única raiz real da equação $x^3 + x^2 = 2$.

Problema 11. (ITA) A equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ admite i (unidade imaginária) como raiz. Determine as demais raízes.

Dicas

3. Use Girard para analisar os casos:

   i) as 3 raízes são iguais.
   ii) as raízes são r, r, s $(r \neq s)$.

4. Denote as raízes por a, $2a$, b e utilize Girard.

5. Utilize Girard para analisar a paridade das raízes.

7. Faça a substituição $y^{\frac{1}{2}} = x$ e use Girard. Tenha cuidado a soma pedida é em relação à variável y.

10. Denote as raízes diferentes de 1 por $a + bi$ e $a - bi$ (o Teorema das Raízes Complexas garante que as últimas 2 raízes, de fato, são números complexos conjugados). Depois, use Girard.

11. Use o Teorema das Raízes Complexas para obter que $-i$ também é raiz. Depois, use Girard.

Respostas e Soluções

3. Se supusermos que há 3 raízes iguais, então, pela fórmula de Girard para a soma, obteríamos 0 como raiz, um absurdo.

   Assim, só nos resta analisar o caso em que as raízes são r, r e s. Por Girard, teríamos:

$$2r + s = 0 \Rightarrow s = -2r,$$
$$r^2 s = -8 \Rightarrow -2r^3 = -8 \Rightarrow r^3 = 4.$$

   Para concluirmos o absurdo desta parte, podemos utilizar que, se r é uma raiz, então $r^3 - 3r + 8 = 0 \Rightarrow 3r = 8$, que contradiz a igualdade $r^3 = 4$.

4. Sejam $a, 2a, b$ as raízes. Por Girard, temos

$$a + 2a + b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0,$$
$$a \cdot 2a + a \cdot b + 2a \cdot b = -3 \Rightarrow 2a^2 + 3ab = -3.$$

   Eliminando b, temos $a = \pm 1$. Assim:

   i) $a = 1 \Rightarrow b = -3$. Logo, $m = 6$.
   ii) $a = -1 \Rightarrow b = 3$. Logo, $m = -6$.

5. Sejam p_1, p_2, p_3, p_4 as 4 raízes pares e i a raíz ímpar. Por Girard, $-b$ é a soma de quatro número pares e um ímpar, ou seja, b é ímpar; os demais coeficientes serão somas de produtos em que pelo menos um fator é p_k ($k = 1, 2, 3$ ou 4) e, portanto, são todos pares. Logo, p possui 4 coeficientes pares.

7. Vamos começar com a substituição $y^{\frac{1}{2}} = x$. A equação se torna

$$x^3 + 5x^2 + 2x + 8 = 0.$$

   Todavia, devemos ficar atentos que não nos interessa o valor de $x_1 + x_2 + x_3$, uma vez que a letra x **não** é a incógnita inicial.

   Nosso objetivo é calcular

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

   ou seja,

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = (-5)^2 - 2(2) = 21.$$

10. Inicialmente, veja que 1 é raiz de $x^3 + x^2 = 2$, pois $1^3 + 1^2 = 2$, e que essa equação pode ser reescrita como $x^3 + x^2 - 2 = 0$.

    Suponha que, além da raiz 1, essa equação possua uma raiz complexa e não-real $a+bi$. Como temos a condição do teorema visto no problema 20 (que é termos coeficientes reais), $a - bi$ também deve ser uma raiz. Por Girard, temos

    $$1 + a + bi + a - bi = -1 \Rightarrow a = -1,$$
    $$1 \cdot (a + bi) \cdot (a - bi) = 2 \Rightarrow 1 + b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm 1.$$

    Temos, assim, raízes 1, $-1 \pm i$, que verificam a relação de Girard restante

    $$1(-1 + i) + 1(-1 - i) + (-1 + i)(-1 - i) = 0.$$

    Assim, 1 é, de fato, a única raiz real.

11. Observe, inicialmente, que todos os coeficientes dessa equação são reais. Pelo teorema visto no problema 20, podemos concluir que $-i$ (que é o conjugado do número complexo i) também é raiz da equação dada.

    Por Girard, sendo r a terceira raiz, então

    $$i + (-i) + r = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{3}{4}.$$

    Outra maneira, talvez até mais natural de se resolver esse problema, é através de fatoração:

    $$\begin{aligned} 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2(4x - 3) + (4x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow (4x - 3)(x^2 + 1) = 0, \end{aligned}$$

    cujas raízes são, de fato, $\frac{3}{4}$, i e $-i$.