Desigualdades 1

Nesta aula, aprenderemos e exercitaremos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica e a desigualdade de Cauchy, bem como alguns corolários seus. Para saber mais sobre o conteúdo desta aula, sugerimos as seções 7.1 a 7.3 de [1], 2.3 e 2.4 de [3] e a seção 5.5 de [4].

A observação básica para o estudo sistemático de desigualdades é o fato do quadrado de todo número real ser não negativo, sendo igual a zero se e só se o número em questão for também igual a zero. Portanto, para $x, y \in \mathbb{R}$ temos $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, ocorrendo a igualdade se e só se $|x| = |y|$. Desenvolvendo a expressão entre parênteses, concluímos que

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq |xy|, \tag{1}$$

ocorrendo a igualdade se e só se $|x| = |y|$. Assim, partindo de dois números reais positivos a e b e fazendo $x = \sqrt{a} \geq 0$ e $y = \sqrt{b} \geq 0$, segue da desigualdade acima que

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}, \tag{2}$$

ocorrendo a igualdade se e só se $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, i.e., se e só se $a = b$.

Exemplo 1. Para x, y, z reais positivos, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz, \tag{3}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y = z$.

Prova. Para obter a desigualdade do enunciado, basta somar membro a membro as desigualdades parciais (obtidas a partir de (2))

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy, \quad \frac{x^2 + z^2}{2} \geq xz, \quad \frac{y^2 + z^2}{2} \geq yz.$$

Se $x = y = z$, então a desigualdade do enunciado é claramente uma igualdade. Reciprocamente, se ao menos uma das desigualdades acima for estrita, digamos $\frac{x^2+y^2}{2} > xy$, então, após somarmos as mesmas membro a membro, obteremos

$$x^2 + y^2 + z^2 > xy + xz + yz.$$

$\square$

A desigualdade (2) é um caso particular da *desigualdade entre as médias aritmética e geométrica*. A fim de enunciar e provar tal generalização precisamos, inicialmente, da seguinte

Definição 2. *Para $n > 1$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definimos sua:*

(a) **Média aritmética** *como o número* $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

(b) **Média geométrica** *como o número* $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

No contexto da definição acima, o que fizemos em (2) foi mostrar que a média aritmética de dois reais positivos é sempre maior ou igual que sua média geométrica, ocorrendo a igualdade somente se os dois números forem iguais. Estabelecemos o caso geral no resultado a seguir, sendo (4) conhecida como a **desigualdade entre as médias**.

Teorema 3. *Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \tag{4}$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Para entender a dinâmica da prova do teorema acima, analisemos separadamente os casos $n = 3$ e $n = 4$, começando com o caso $n = 4$. Para tanto, dados reais positivos a, b, c, d, já sabemos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ e $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$. Daí,

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Mostramos, acima, que $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. Escrevendo tal desigualdade com $\sqrt[3]{abc}$ no lugar de d, obtemos

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[4]{d^3 d} = d = \sqrt[3]{abc}.$$

Segue, daí, a desigualdade $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[3]{abc}$, ou, o que é o mesmo, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Conforme veremos a seguir, a prova da versão geral da desigualdade entre as médias é uma adaptação dos argumentos utilizados para os dois casos acima.

Prova do Teorema 3. Inicialmente, provemos por indução que a desigualdade desejada é verdadeira sempre que n for uma potência de 2, ocorrendo a igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Para tanto, temos de verificar o caso inicial $n = 2$ (o que já foi feito ao longo da discussão que estabeleceu (2)), formular a hipótese de indução (para $n = 2^j$, digamos) e executar o passo de indução (deduzir o caso $n = 2^{j+1}$ a partir do caso $n = 2^j$). Mas desde que $2^{j+1} = 2 \cdot 2^j$, basta supormos que a desigualdade seja verdadeira para quaisquer k reais positivos, com igualdade se e só se os k números forem todos iguais, e deduzir a partir daí que ela também será verdadeira para quaisquer $2k$ reais positivos, com igualdade novamente se e só se todos os números forem iguais. Para estabelecer esse fato, considere os $2k$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$. Então:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{2k} a_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_{k+j}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1\ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}\right)\\ &\geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}\,\sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1\ldots a_k a_{k+1}\ldots a_{2k}}.\end{aligned}$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Então, deve ser

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} = \sqrt[k]{a_1\ldots a_k}, \quad \frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k} = \sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}$$

e

$$\frac{\sqrt[k]{a_1\ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}}{2} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}\,\sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}}.$$

Para as duas primeiras igualdades, devemos ter por hipótese que $a_1 = \cdots = a_k$ e $a_{k+1} = \cdots = a_{2k}$. Por fim, a última igualdade ocorre se e só se $\sqrt[k]{a_1\ldots a_k} = \sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}$, e esta condição, juntamente com as duas anteriores, implica que devemos ter $a_1 = \cdots = a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{2k}$. É também evidente que, se os números forem todos iguais, então a igualdade ocorre (verifique!). Logo, por indução temos (4) verdadeira, com a condição para a igualdade dada no enunciado, sempre que n for uma potência de 2.

Provemos agora, por indução forte, que a desigualdade é verdadeira em geral, ocorrendo a igualdade se e só se os números forem todos iguais. Para tanto, seja $n > 1$ natural e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos dados. Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > n$. Aplicando a desigualdade entre as médias aos n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, juntamente com $2^k - n$ cópias do número $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (totalizando $n + (2^k - n) = 2^k$ números), obtemos

$$\frac{a_1+\cdots+a_n+a+\cdots+a}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1\ldots a_n\cdot a^{2^k-n}} = \sqrt[2^k]{a^n a^{2^k-n}} = \sqrt[2^k]{a^{2^k}} = a.$$

A partir daí, obtemos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (2^k - n)a \geq 2^k a$ ou, ainda,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Para haver igualdade, segue da primeira parte que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a = \cdots = a$. Em particular, todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ devem ser iguais. Finalmente, é fácil ver que se esses números forem todos iguais, então haverá igualdade. □

Exemplo 4. Para $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2, \tag{5}$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Prova. Aplicando duas vezes a desigualdade entre as médias, temos

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\right) = n^2.$$

Para haver a igualdade, devemos ter $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, donde $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Reciprocamente, é imediato verificar que se todos os números forem iguais, então teremos igualdade em (5). □

Exemplo 5 (Ásia-Pacífico)**.** Se a, b e c são reais positivos, prove que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Prova. Desenvolvendo o primeiro membro, obtemos

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = 2 + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c},$$

donde basta mostrarmos que

$$\frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Denotando por S o primeiro membro da expressão acima, segue da desigualdade entre as médias e de (5) que

$$\begin{aligned} S &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 \\ &= \frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 \\ &\geq \frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\right) + \frac{1}{3}\cdot 9 - 3 \\ &= \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}. \end{aligned}$$

□

Voltando a (1), suponha dados números reais a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3, tais que $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ e $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$. Temos

$$a_1^2 + b_1^2 \geq |a_1b_1|, \quad a_2^2 + b_2^2 \geq |a_2b_2|, \quad a_3^2 + b_3^2 \geq |a_3b_3|, \tag{6}$$

ocorrendo a igualdade se e só se $|a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$, $|a_3| = |b_3|$. Somando membro a membro as desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) &= (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) \\ &\geq 2(|a_1b_1| + |a_2b_2| + |a_3b_3|) \\ &\geq 2|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|, \end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, aplicamos a desigualdade triangular para três números (cf. Problema 1).

Portanto, provamos acima que, se $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ e $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$, então

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq 1. \tag{7}$$

A igualdade ocorre se e só se tivermos igualdade tanto nas desigualdades em (6) quanto na desigualdade triangular utilizada, i.e., se e só se $|a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$ e $|a_3| = |b_3|$ e, além disso, $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 \geq 0$ ou $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 \leq 0$. Mas é imediato verificar que tais condições são equivalentes a $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e $a_3 = b_3$.

Considere, agora, números reais a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 quaisquer, exceto pelo fato de que pelo menos um dos números a_1, a_2, a_3 e pelo menos um dos números b_1, b_2, b_3 são não nulos. Fazendo $c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ e $d = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, temos $c, d > 0$; portanto, se $x_i = \frac{a_i}{c}$ e $y_i = \frac{b_i}{d}$, para $1 \leq i \leq 3$, temos $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{c^2} = 1$ e, analogamente, $y_1^2+y_2^2+y_3^2 = 1$. Segue, pois, de (7) que

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \leq 1,$$

com igualdade se e só se $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq 3$.

Substituindo as definições de x_i e y_i na desigualdade acima, concluímos ser ela equivalente à desigualdade

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq cd = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Ademais, há igualdade se e só se $a_i = \frac{c}{d} \cdot b_i$ para $1 \leq i \leq 3$.

A discussão acima estabeleceu, para $n = 3$, a desigualdade do teorema a seguir, conhecida como a **desigualdade de Cauchy**.

Teorema 6 (Cauchy)**.** *Sejam $n > 1$ inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais dados. Então*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_jb_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}, \tag{8}$$

ocorrendo a igualdade se e só se os a_i e os b_i forem respectivamente proporcionais*, i.e., se e só se existir um real não nulo λ tal que $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_n = \lambda b_n$.*

Prova. Se todos os a_i ou todos os b_i forem iguais a zero, nada há a fazer. Senão, a fim de estabelecer (8), basta seguir os passos do caso particular $n = 3$ discutido acima, tomando o cuidado de, no momento oportuno, utilizar o caso geral da desigualdade triangular. $\square$

Os dois exemplos a seguir ilustram a utilização da desigualdade de Cauchy.

Exemplo 7 (Romênia)**.** Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ reais positivos tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_{n+1}$. Prove que

$$\sqrt{x_1(x_{n+1} - x_1)} + \cdots + \sqrt{x_n(x_{n+1} - x_n)} \leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + \cdots + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}.$$

Prova. Para $1 \leq j \leq n$ seja $y_j = x_{n+1} - x_j$. Pela desigualdade de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 y_1} + \cdots + \sqrt{x_n y_n} &\leq \sqrt{x_1 + \cdots + x_n}\sqrt{y_1 + \cdots + y_n} \\ &= \sqrt{x_{n+1}}\sqrt{(x_{n+1} - x_1) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8. Dados números reais $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$, temos

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}, \tag{9}$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ forem positivamente proporcionais, i.e., se e só se existir um real *positivo* λ, tal que $a_i = \lambda b_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Prova. Façamos a prova para $n = 3$, sendo o caso geral inteiramente análogo. Uma vez que ambos os membros de (9) são reais não negativos, basta mostrar que o quadrado do primeiro membro é menor ou igual que o quadrado do segundo membro, i.e., que

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 \leq \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right)^2.$$

Desenvolvendo todos os quadrados $(a_i + b_i)^2$, segue que o quadrado do primeiro membro é igual a

$$(a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2) + (a_3^2 + 2a_3b_3 + b_3^2).$$

Analogamente, o quadrado do segundo membro é igual a

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Mas, como em ambas as expressões temos a parcela $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$, a desigualdade do enunciado é equivalente a

$$2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \leq 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

a qual é, precisamente, a desigualdade de Cauchy.

A dedução das condições para a igualdade fica a cargo do leitor. □

Problemas

1. * Dados números reais não nulos x_1, x_2, $\ldots x_n$, prove a **desigualdade triangular**:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

ocorrendo a igualdade se e só se x_1, x_2, $\ldots$, x_n tiverem um mesmo sinal.

2. (OBM). Sejam a, b, c reais positivos dados. Prove que
$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

3. Dispomos de uma folha de cartolina de 2m por 3m e queremos construir com a mesma uma caixa aberta com o maior volume possível. Quais devem ser as dimensões da caixa? Justifique sua resposta.

4. (Estados Unidos). Prove que, para todos a, b, c reais positivos, tem-se
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

   Para os dois problemas a seguir precisamos de um pouco de geometria Euclidiana plana. Mais precisamente (cf. Figura 1), sendo $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ os comprimentos dos lados de um triângulo ABC, existem $x, y, z > 0$ tais que $a = y + z$, $b = x + z$ e $c = x + y$: basta tomar x, y e z como sendo iguais aos comprimentos dos segmentos determinados sobre os lados de ABC pelos pontos de tangência com os mesmos do círculo inscrito em ABC (para uma prova de tais afirmações, veja o Capítulo 3 de [2]). No contexto de desigualdades envolvendo os lados a, b e c de um triângulo, a substituição dos mesmos respectivamente por $y + z$, $x + z$ e $x + y$ é conhecida como a **transformação de Ravi**.

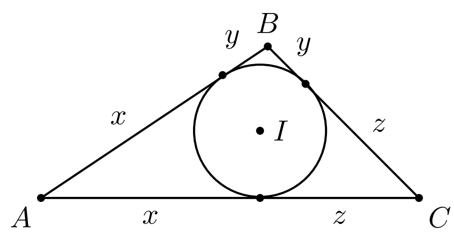

Figura 1: a transformação de Ravi.

5. (IMO). Se a, b, c são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que
$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

6. Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. Prove que
$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

7. (Baltic Way). Sejam a, b, c, d reais positivos dados. Prove que
$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

8. (União Soviética). Sejam a, b, c reais positivos. Prove que
$$(ab + ac + bc)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

9. Sejam a, b e c reais positivos dados. Prove que $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$.

10. Dados a, b, c reais positivos, prove que
$$a^4(1 + b^4) + b^4(1 + c^4) + c^4(1 + a^4) \geq 6a^2b^2c^2,$$
com igualdade se e só se $|a| = |b| = |c| = 1$.

11. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos. Prove que
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

12. O propósito deste problema é apresentar uma segunda demonstração da desigualdade (5), a qual não faz uso da desigualdade (4). Para tanto, faça os dois itens a seguir:

    (a) Mostre que
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = n + \sum_{i<j}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right).$$

    (b) Aplique a desigualdade entre as médias para cada uma das parcelas $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}$ do somatório acima e obtenha (5).

13. (Romênia). Sejam $n > 1$ inteiro e $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ reais dados. Prove que
$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n} \leq \frac{n}{a_1} + \frac{n-1}{a_2 - a_1} + \frac{n-2}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n - a_{n-1}}.$$
Sob que condições a igualdade ocorre?

14. (China). Para a, b e c reais positivos, prove que
$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}.$$

15. Dados reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definimos sua média *quadrática* como o número real
$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$
Prove a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética:
$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \tag{10}$$
com igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

16. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 reais positivos. Prove que

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq 4} \frac{a_i^2+a_j^2+a_k^2}{a_i+a_j+a_k} \geq a_1+a_2+a_3+a_4,$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

17. (Leningrado). Dados reais positivos a, b, c e d, prove que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

18. (União Soviética). Se $x, y, z > 0$, prove que $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$.

19. (Torneio das Cidades). Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos dados. Prove que

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n).$$

20. (IMO). Sejam a, b e c reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bibliografia

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

3. E. Lozansky e C. Rousseau. *Winning Solutions.* Springer-Verlag, Nova Iorque, 1996.

4. P. Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving.* John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1999.

Dicas e Soluções

1. Faça indução sobre $n \geq 2$. Para o caso inicial, eleve ambos os membros da desigualdade em questão ao quadrado e utilize (1), juntamente com o fato de que $|a|^2 = a^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. Desenvolva o primeiro membro e, em seguida, aplique a desigualdade (2) adequadamente.

3. Sendo x o comprimento do lado do quadrado que deve ser recortado de cada canto da folha, ficaremos com uma caixa de dimensões $2-2x$, $3-2x$ e x. Escolha números reais positivos a, b e c tais que $a(2-2x)+b(3-2x)+cx$ independa de x e $a(2-2x) = b(3-2x) = cx$; em seguida aplique a desigualdade entre as médias a fim de maximizar o volume da caixa.

4. Mostre inicialmente que $a^3 + b^3 \geq (a+b)ab$; em seguida, deduza a partir daí que $\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{c}{abc(a+b+c)}$, obtendo desigualdades análogas para as outras duas parcelas do primeiro membro.

5. Aplique a transformação de Ravi e, em seguida, utilize (2) três vezes.

6. Aplique a transformação de Ravi para escrever o primeiro membro como
$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}\right);$$
em seguida, utilize a desigualdade entre as médias.

7. Agrupe adequadamente as quatro parcelas em pares e utilize duas vezes a desigualdade (5), para $n = 2$.

8. Inicialmente, mostre que é suficiente provar que $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geq abc(a+b+c)$; para o que falta, faça $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$ e aplique a desigualdade (3).

9. Inicialmente, mostre a identidade algébrica
$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c);$$
em seguida, após efetuar as simplificações óbvias, mostre que
$$8(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b)^3+(a+c)^3+(b+c)^3$$
e utilize a desigualdade entre as médias para três números.

10. Aplique a desigualdade entre as médias.

11. Aplique a desigualdade entre as médias.

13. Faça $a_0 = 0$ e aplique a desigualdade (5) para obter

$$\frac{1}{a_j - a_{j-1}} + \cdots + \frac{1}{a_1 - a_0} \geq \frac{j^2}{a_j}.$$

Em seguida, some membro a membro as desigualdades acima para $1 \leq j \leq n$ e agrupe os termos iguais para obter a desigualdade procurada. Por fim, conclua que há igualdade se e só se a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ for uma PA.

14. Substituindo a, b e c na desigualdade desejada respectivamente por $6x^6$, $6y^6$ e $6z^6$, mostre que basta provarmos a desigualdade

$$7x^{12} + 12x^6y^6 + 7y^6z^6 + 9y^{12} + 9x^6z^6 \geq$$

$$\geq 2x^3y^9 + 6x^9y^3 + 6x^2y^8z^2 + 12x^5y^5z^2 + 6x^4y^4z^4 + 6xy^7z^4 + 6x^8y^2z^2.$$

Para tanto, escreva a expressão do primeiro membro como a soma de sete outras expressões tais que, aplicando a desigualdade entre as médias a cada uma delas, obtenhamos as sete parcelas do segundo membro; por exemplo,

$$2x^6z^6 + 2x^6z^6 + 2x^{12} + 2y^{12} + 2y^{12} + 2x^6y^6 \geq 12x^5y^5z^2.$$

15. Aplique a desigualdade de Cauchy com $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$.

16. Aplique a desigualdade do problema anterior ao numerador de cada parcela do somatório acima.

17. Multiplique ambos os membros por $a + b + c + d$ e use a desigualdade de Cauchy; alternativamente, tente aplicar a desigualdade (5).

18. Use a desigualdade de Cauchy.

19. Faça a prova por indução sobre $n \geq 2$. Para o passo de indução, aplique a desigualdade de Cauchy.

20. Faça $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ e $z = \frac{1}{c}$ e, em seguida, aplique a desigualdade de Cauchy para obter

$$((y+z) + (x+z) + (x+y))\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2.$$

Por fim, aplique a desigualdade entre as médias.