Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Antonio Caminha

Aula 2

Desigualdades 2

Esta aula é devotada ao estudo de outras desigualdades elementares importantes. Para saber mais sobre o material aqui discutido, remetemos o leitor ao Capítulo 2 de [1], à Seção 7.4 de [2], ao Capítulo 7 de [3] ou, por fim, à Seção 2.4 de [4].

A primeira desigualdade que apresentamos remonta os irmãos Bernoulli (Jacob e Johann Bernoulli, matemáticos suíços do século XVIII), sendo conhecida como a **desigualdade de Bernoulli**. Apesar de sua aparente simplicidade, veremos que ela se revela bastante útil em aplicações.

Proposição 1 (Bernoulli)**.** *Dados n natural e $x > -1$ real, temos $(1+x)^n \geq 1 + nx$, ocorrendo a igualdade para $n > 1$ se e só se $x = 0$.*

Prova. Façamos indução sobre n, sendo o caso $n = 1$ imediato. Suponha, por hipótese de indução, que $(1+x)^k \geq 1 + kx$; como $1 + x > 0$, temos

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x,$$

ocorrendo a igualdade se e só se $(1+x)^k = 1 + kx$ e $kx^2 = 0$, i.e., se e só se $x = 0$. □

Exemplo 2. Dados n natural e a e b reais positivos, mostre que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1},$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a = b$.

Prova. Dividindo ambos os membros da desigualdade do enunciado por 2^n, vemos que basta provar que

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{b}{2a}\right)^n \geq 2.$$

Como $-\frac{1}{2} + \frac{a}{2b} > -1$ e $-\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} > -1$, aplicando a desigualdade de Bernoulli a cada parcela do primeiro membro acima e somando os resultados, obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{b}{2a}\right)^n \geq 2 + n\left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - 1\right).$$

Basta, agora, aplicar a desigualdade entre as médias para obter

$$\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{2b} \cdot \frac{b}{2a}} - 1 = 0,$$

com igualdade se e só se $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2a}$, i.e., se e só se $a = b$. $\square$

A próxima desigualdade que apresentamos é conhecida na literatura como a **desigualdade de Chebyshev**, assim nomeada após Pafnuty Chebyshev, matemático russo do século XIX.

Teorema 3 (Chebyshev)**.** *Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são números reais tais que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad e \quad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n,$$

então

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Prova. Temos de mostrar que

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq 0,$$

para o que basta observar que a expressão do primeiro membro é igual a

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Mas, como os a_i's e b_i's são igualmente ordenados, concluímos que a expressão acima é, realmente, não negativa.

Note agora que, se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, então haverá igualdade na desigualdade de Chebyshev. Reciprocamente, suponha que temos igualdade em tal desigualdade. Como $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ para todos os índices i, j, para haver igualdade devemos ter $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$ para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Se existir $1 \leq k \leq n$ tal que $b_k < b_{k+1}$, então $b_1 \leq \cdots \leq b_k < b_{k+1} \leq \cdots \leq b_n$ e a condição $(a_i - a_{k+1})(b_i - b_{k+1}) = 0$ para todo i garante que $a_i = a_{k+1}$ para $i \leq k$. Portanto, temos $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$. Por outro lado, a partir de $(a_i - a_k)(b_i - b_k) = 0$ para $i > k$, concluímos que $a_{k+1} = \cdots = a_n$. Logo, todos os a_i's devem ser iguais. $\square$

Exemplo 4. Se k é um natural e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são reais positivos, então

$$\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^k, \tag{1}$$

com igualdade se e só se todos os a_i's forem iguais.

Prova. Façamos indução sobre $k \geq 1$, sendo (1) trivialmente verdadeira para $k = 1$ e todos os $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos. Seja agora $l > 1$ um natural tal que (1) valha para $k = l - 1$ e todos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos. Dados reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, como ambos os membros da desigualdade que queremos provar são invariantes por permutações dos índices $1, 2, \ldots, n$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Daí, temos $a_1^{l-1} \leq a_2^{l-1} \leq \cdots \leq a_n^{l-1}$, e segue da desigualdade de Chebyshev que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^l \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{l-1}\right).$$

Por outro lado, a hipótese de indução fornece

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{l-1} \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{l-1},$$

e combinando essas duas desigualdades obtemos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^l \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{l},$$

conforme desejado. Por fim, a condição de igualdade é óbvia a partir condição de igualdade na desigualdade de Chebyshev. □

Exemplo 5 (Polônia)**.** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos com soma s. Prove que

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Prova. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Então $s - a_1 \geq s - a_2 \geq \cdots \geq s - a_n$. Como $s - a_i > 0$ para todo i, segue que $\frac{1}{s-a_1} \leq \frac{1}{s-a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{s-a_n}$. Portanto, pela desigualdade de Chebyshev temos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \cdot \frac{1}{s - a_i}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - a_i}\right) = \frac{s}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - a_i}\right).$$

Mas, pelo Exemplo 4 da Aula 1, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - a_i} \geq n^2\left(\sum_{i=1}^{n}(s - a_i)\right)^{-1} = n^2(ns - s)^{-1} = \frac{n^2}{(n-1)s}.$$

Por fim, basta combinar as duas desigualdades acima. □

A segunda igualdade que apresentamos é conhecida como a **desigualdade do rearranjo**. Para o enunciado da mesma, recorde que uma **permutação** de uma sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, é uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $x_i = a_{\sigma(i)}$, para alguma bijeção $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Proposição 6. *Sejam $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ reais positivos dados. Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma permutação qualquer de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, então*

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2,$$

ocorrendo a igualdade na primeira (resp. segunda) desigualdade acima se e só se $x_i = a_{n-i}$ (resp. $x_i = a_i$) para $1 \leq i \leq n$.

Prova. Mostremos como maximizar a soma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, sendo o raciocínio para minimizá-la totalmente análogo.

Como o número de permutações $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dos a_i's é finito, há pelo menos uma delas que maximiza a soma $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$. Se $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é uma tal permutação, queremos mostrar que $b_i = a_i$ para $1 \leq i \leq n$, e para tanto basta mostrarmos que deve ser $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. Suponha o contrário, i.e., que existam índices $i < j$ tais que $b_i > b_j$. Defina a permutação $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ dos a_i's pondo

$$b'_k = \begin{cases} b_k, & \text{se} \quad k \neq i, j \\ b_i, & \text{se} \quad k = j \\ b_j, & \text{se} \quad k = i \end{cases}.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i b'_i - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= (a_i b'_i + a_j b'_j) - (a_i b_i + a_j b_j) \\ &= (a_i b_j + a_j b_i) - (a_i b_i + a_j b_j) \\ &= (a_i - a_j)(b_j - b_i) > 0. \end{aligned}$$

Isso é o mesmo que

$$a_1b'_1 + a_2b'_2 + \cdots + a_nb'_n > a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

o que por sua vez contraria o fato de que a permutação $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos a_i's maximiza a soma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ máximo. Logo, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. □

Exemplo 7. Dados reais positivos a, b e c, mostre que $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c$. Uma aplicação direta da desigualdade do rearranjo nos dá

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a.$$

□

Conforme mostrado pelo próximo exemplo, a ideia da prova da desigualdade do rearranjo é, por vezes, tão útil quanto a desigualdade em si.

Exemplo 8 (Eslovênia)**.** Dados $2n$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, como devemos arranjá-los em pares de modo que a soma dos n produtos dos números de cada par seja máxima?

Solução. Suponha, sem perda de generalidade, que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2n}$ e arranje tais números em n pares (b_1, c_1), (b_2, c_2), ..., (b_n, c_n), com $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ e $b_j \leq c_j$, para todo j. Queremos maximizar

$$S = b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_nc_n.$$

Para isso, vamos mostrar que $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$. De fato, se a sequência (c_i) não for não decrescente, existirão índices $i > j$ tais que $c_i \leq c_j$. Neste caso, trocamos as posições de c_i e c_j em S, após o que a nova soma será

$$S' = S - b_ic_i - b_jc_j + b_ic_j + b_jc_i = S + (b_i - b_j)(c_j - c_i) \geq S.$$

Logo, a soma será máxima quando $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$.

Finalmente, observe que, para todos $i < j$, temos $b_i \leq c_i \leq c_j$. Suponha que, para algum par $i < j$, tivéssemos $b_j \leq c_i$. Neste caso, trocamos c_i por b_j, de modo que a nova soma seja

$$S'' = S - b_ic_i - b_jc_j + b_ib_j + c_ic_j = S + (b_i - c_j)(b_j - c_i) \geq S.$$

Portanto, devemos ter, para todos $i < j$, $b_i \leq c_i \leq b_j \leq c_j$. Em geral, teremos

$$b_1 \leq c_1 \leq b_2 \leq c_2 \leq \cdots \leq b_n \leq c_n.$$

Logo, a soma máxima é $a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{2n-1}a_{2n}$. $\square$

A última desigualdade que discutiremos aqui é devida ao matemático norueguês do século XIX Niels Henrik Abel, sendo conhecida como a **desigualdade de Abel**.

Teorema 9 (Abel)**.** *Sejam $n > 1$ natural e $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais dados, com $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$. Se M e m denotam respectivamente os elementos máximo e mínimo do conjunto de somas $\{b_1, b_1 + b_2, \ldots, b_1 + b_2 + \ldots + b_n\}$, então*

$$ma_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq Ma_1.$$

Prova. Provemos a desigualdade da direita, sendo a prova da desigualdade da esquerda totalmente análoga.

Faça $s_0 = 0$ e $s_i = b_1 + \cdots + b_i$, para $1 \leq i \leq n$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_ib_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i(s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_is_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}s_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})s_i + a_ns_n \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} M(a_i - a_{i+1}) + Ma_n = Ma_1.
\end{aligned}$$

$\square$

Para referência futura, observamos que, nas notações da prova do teorema acima, a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) s_i + a_n s_n \tag{2}$$

é conhecida como a **identidade de Abel**, sendo quase tão útil quanto a desigualdade de Abel em si.

Exemplo 10 (Romênia - adaptado)**.** Sejam $n > 1$ inteiro e $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ reais positivos tais que $x_1y_1 < x_2y_2 < \cdots < x_ny_n$ e, para $1 \leq k \leq n$, $x_1 + \cdots + x_k \geq y_1 + \cdots + y_k$. Prove que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}.$$

Prova. Inicialmente, observe que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - y_i}{x_i y_i}. \tag{3}$$

Por outro lado, a condição $x_1 + \cdots + x_k \geq y_1 + \cdots + y_k$ para $1 \leq k \leq n$ pode ser escrita como

$$(x_1 - y_1) + \cdots + (x_k - y_k) \geq 0$$

para $1 \leq k \leq n$. Assim, fazendo $a_i = \frac{1}{x_i y_i}$ e $b_i = x_i - y_i$ para $1 \leq i \leq n$, temos $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $b_1 + \cdots + b_i \geq 0$ e $\frac{x_i - y_i}{x_i y_i} = a_i b_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Aplicando a desigualdade de Abel a (3), obtemos então

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq a_n \cdot \min\{b_1 + \cdots + b_i;\ 1 \leq i \leq n\} \geq 0.$$

$\square$

Problemas

1. Para $n \in \mathbb{N}$, prove que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2. (Estados Unidos). Para m, n naturais, seja $a = \frac{m^{m+1} + n^{n+1}}{m^m + n^n}$. Prove que

$$a^m + a^n \geq m^m + n^n.$$

3. (Croácia). Encontre todas as soluções reais positivas do sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_{1994} = 1994 \\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{1994}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{1994}^3 \end{array}\right. .$$

4. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 reais positivos. Prove que

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \frac{a_i^3 + a_j^3 + a_k^3}{a_i + a_j + a_k} \geq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2,$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

5. Sejam $n > 1$ inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais dados, com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Se $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ são reais positivos com soma igual a 1, prove que

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i b_i$$

e dê condições necessárias e suficientes para a igualdade. A que caso particular corresponde a desigualdade de Chebyshev?

6. Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3}.$$

7. Sejam a, b, c, d reais não negativos tais que $ab + bc + cd + da = 1$. Prove que

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

8. Para a, b, c reais positivos e $n \in \mathbb{N}$, prove que

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

9. Sejam x, y e z reais positivos tais que $xyz = 1$. Prove que

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

10. Sejam $n > 1$ inteiro e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos dados, com soma igual a 1. Prove que

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}.$$

11. Dados reais positivos a, b e c, mostre que $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

12. (IMO). Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de inteiros positivos dois a dois distintos. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

13. (Torneio das Cidades). Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos dados. Prove que
$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \leq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k).$$

14. Sejam a_i, b_i números reais tais que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_1 > 0$ e $b_1 \geq a_1$, $b_1 b_2 \geq a_1 a_2$, $\ldots$, $b_1 b_2 \cdots b_n \geq a_1 a_2 \cdots a_n$. Mostre que
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Bibliografia

1. T. Andreescu e R. Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser, Boston, 2009.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 1*: Números Reais*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

3. A. Engel. *Problem Solving Strategies*. Springer-Verlag, Nova Iorque, 1998.

4. E. Lozansky e C. Rousseau. *Winning Solutions*. Springer-Verlag, Nova Iorque, 1996.

Dicas e Soluções

1. Comece obsevando que
$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$
Em seguida, aplique a desigualdade de Bernoulli.

2. Escreva $a^m = m^m\left(1+\frac{a-m}{m}\right)^m$ e, em seguida, aplique a desigualdade de Bernoulli. Faça o mesmo com a^n e, por fim, some os resultados.

3. Escreva $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{1994}^4 = x_1^3 \cdot x_1 + x_2^3 \cdot x_2 + \cdots + x_{1994}^3 \cdot x_{1994}$ e, em seguida, aplique a desigualdade de Chebychev para obter
$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{1994}^4 \geq \frac{1}{1994}(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{1994}^3)(x_1 + x_2 + \cdots + x_{1994}).$$
Por fim, use as equações do sistema.

4. Aplique a desigualdade de Chebyshev a cada parcela do somatório.

5. Adapte a prova da desigualdade de Chebyshev ao caso em questão.

6. Aplique a desigualdade de Chebychev.

7. Aplique a desigualdade de Chebychev para concluir que a expressão do primeiro membro é maior ou igual que
$$\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\right).$$
Em seguida, aplique o resultado do Exemplo 4, juntamente com o resultado do Exemplo 4 da Aula 1, para concluir que a última expressão acima é maior ou igual que
$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3\cdot\frac{4^2}{3(a+b+c+d)}=\frac{(a+b+c+d)^2}{12}.$$
Por fim, observe que a condição do enunciado equivale a $(a+c)(b+d)=1$ e aplique a desigualdade entre as médias.

8. Adapte a sugestão dada ao problema anterior.

9. Supondo, sem perda de generalidade, $x \geq y \geq z$, use a desigualdade de Chebychev para concluir que a expressão do enunciado é maior ou igual que
$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)\cdot\frac{(x+1)+(y+1)+(z+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$
Em seguida, aplique a desigualdade de Chebychev ao primeiro fator e a desigualdade entre as médias ao segundo fator para concluir que a última expressão acima é maior ou igual que $\frac{3t^3}{(t+1)^2}$, onde $t=\frac{1}{3}(x+y+z)$. Por fim, use a desigualdade entre as médias para concluir que $t \geq 1$ e, em seguida, prove que $t \geq s \Rightarrow \frac{3t^3}{(t+1)^2} \geq \frac{3s^3}{(s+1)^2}$.

10. Para obter a primeira desigualdade, aplique a desigualdade de Chebychev ao primeiro somatório, seguida do resultado do Exemplo 4 da Aula 1. Para a segunda desigualdade, utilize a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática (cf. Problema 15 da Aula 1).

11. Suponha, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c$. Basta aplicar a desigualdade do rearranjo, observando que a desigualdade a ser provada é equivalente a

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2.$$

12. Aplique a desigualdade do rearranjo.

13. Faça a prova por indução sobre $n > 1$ inteiro. Para o passo de indução, basta provar que

$$\left(1 + \frac{a_n^2}{a_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{a_{n+1}^2}{a_1}\right) \geq \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right)(1 + a_{n+1})$$

ou, equivalentemente, que

$$a_{n+1}^2 \cdot \frac{1}{a_1} + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_{n+1}} \geq a_{n+1} + \frac{a_n^2}{a_1}.$$

Por fim, observe que tal desigualdade é uma aplicação imediata da desigualdade do rearranjo.

14. Faça $\lambda_i = b_i/a_i$, para $1 \leq j \leq n$, e conclua que

$$b_1 + \cdots + b_n \geq a_1 + \cdots + a_n \Leftrightarrow a_1(\lambda_1 - 1) + a_2(\lambda_2 - 1) + \cdots + a_n(\lambda_n - 1) \geq 0.$$

Em seguida, aplique a desigualdade de Abel para concluir que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda_j - 1) \geq a_1 \cdot \min\{\lambda_1 - 1, \lambda_1 + \lambda_2 - 2, \ldots, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n - n\}.$$

Por fim, use a condição do enunciado e a desigualdade entre as médias para mostrar que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq k$.