Polos Olímpicos de Treinamento
Curso de Álgebra - Nível 3
Prof. Antonio Caminha

Aula 3

Funções Definidas Implicitamente 1

Esta é a primeira de duas aulas devotadas ao estudo de funções definidas implicitamente. Para saber mais sobre o material aqui discutido, remetemos o leitor ao Capítulo 1 de [2] ou ao Capítulo 11 de [3].

Uma função pode ser definida *implicitamente* por um conjunto de propriedades. Por exemplo, sendo $g(x) = x + 1$ e $h(x) = x - 1$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é tal que

$$f(g(x)) = g(x)^2 \quad \text{e} \quad f(h(x)) = h(x)^2,$$

ou seja, ela é tal que

$$f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \text{e} \quad f(x+1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Daí, temos que a função acima satisfaz, para todo $x \in \mathbb{R}$, a relação

$$f(x+1) - f(x-1) = 4x.$$

Podemos tentar reverter os passos acima, perguntando agora quais são as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x+1) - f(x-1) = 4x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

É claro que a função $f(x) = x^2$ não é a única, pois, como é fácil verificar, para qualquer constante real c a função $f_c(x) = x^2 + c$ também satisfaz (1).

Como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (1) não está dada por seus valores, e sim por uma relação que deve satisfazer, dizemos que a função está *definida implicitamente*. Note que, a partir de (1), podemos descobrir outras relações que a função satisfaz. Por exemplo, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x^2$, temos

$$f(g(x) + 1) - f(g(x) - 1) = 4g(x),$$

ou ainda

$$f(x^2 + 1) - f(x^2 - 1) = 4x^2, \ \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Assim, qualquer função que satisfizer (1) também satisfará (2). Entretanto, a relação (2) pode não ser muito útil para ajudar a determinar as funções f que satisfazem (1). Só a experiência dirá que relações obtidas a partir de uma relação inicialmente dada serão úteis nesse sentido.

Em geral, um problema interessante é o de encontrar todas as funções definidas implicitamente por um certo conjunto de relações dadas. Uma vez que não há uma teoria geral a esse respeito, no que segue, veremos alguns exemplos que ilustram um certo número de técnicas úteis no trato de funções definidas implicitamente.

Exemplo 1 (Canadá)**.** Ache todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, crescentes e tais que $f(2) = 2$ e $f(mn) = f(m)f(n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

Solução. De $1 \leq f(1) < f(2) = 2$ obtemos $f(1) = 1$. Agora $f(4) = f(2)f(2) = 4$ e $f(8) = f(4)f(2) = 8$. Suponha pois, por hipótese de indução, que $f(2^k) = 2^k$ para um certo natural k. Então

$$f(2^{k+1}) = f(2^k)f(2) = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1},$$

e segue que $f(2^n) = 2^n$ para todo inteiro não negativo n. Portanto, fixado n natural, segue de f ser crescente que

$$2^n = f(2^n) < f(2^n + 1) < \cdots < f(2^{n+1} - 1) < f(2^{n+1}) = 2^{n+1}.$$

Mas, uma vez que $f(2^n + 1)$, $f(2^n + 2)$, ..., $f(2^{n+1} - 1)$ são naturais, a única possibilidade é termos

$$f(2^n + 1) = 2^n + 1,\ f(2^n + 2) = 2^n + 2,\ \ldots,\ f(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1} - 1.$$

Finalmente, como esse raciocínio é válido para todo n natural, segue que $f(m) = m$ para todo m natural. $\square$

Exemplo 2 (Olimp. Iberoamericana)**.** Se $D = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, encontre todas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in D$, tenhamos

$$f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x.$$

Solução. Note antes de tudo que, como $x \neq 0$, temos $f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \neq 0$ para todo $x \in D$. Em particular, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in D$. Seja agora $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ para $x \in D$. A definição de D garante facilmente que $g(D) \subset D$, de modo que podemos compor f com g. Assim, para todo $x \in D$ temos

$$f(g(x))^2 f\left(\frac{1-g(x)}{1+g(x)}\right) = 64g(x). \tag{3}$$

Substituindo a expressão de g na relação acima, chegamos a

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) f\left(\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right) = 64\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

ou ainda

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 f(x) = 64\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

para todo $x \in D$. Elevando ao quadrado ambos os membros da relação do enunciado e dividindo o resultado pela relação acima, vem que

$$f(x)^3 = 64x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

e daí $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$.

Até este ponto, mostramos apenas que, se f existir, deve ser dada por essa expressão. Temos, pois, de verificar que f, assim definida, realmente satisfaz a relação do enunciado para todo $x \in D$. Mas tal verificação é imediata e será deixada a cargo do leitor. $\square$

Ainda em relação ao exemplo anterior, com um pouco mais de prática poderíamos prescindir de definir a função g para em seguida compô-la com f a fim de obter (3). Ao invés disso, poderíamos apenas ter dito

Substituindo x por $\frac{1-x}{1+x}$ na relação do enunciado, obtemos ...,

tendo em mente que essa *substituição* é meramente uma composição de funções. Doravante, sempre que não houver perigo de confusão, adotaremos essa simplificação de linguagem, a qual já aparece no exemplo a seguir. Ao lê-lo, tente identificar as composições que foram mascaradas por substituições.

Exemplo 3. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(1) = 1$ e, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(b) $f(xy) = f(x)f(y)$.

Solução. Seja f uma função satisfazendo as condições do enunciado. Fazendo $x = y = 0$ em (a), obtemos

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

donde segue que $f(0) = 0$. Fazendo $y = x$ em (a), obtemos

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo agora $y = 2x$ em (a), segue que

$$f(3x) = f(x + 2x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Repetindo o argumento acima concluímos, por indução sobre $n \in \mathbb{N}$, que

$$f(nx) = nf(x),\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Em particular, fazendo $x = 1$ em (4), obtemos $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo agora $x = \frac{1}{n}$ em (4), segue que

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

donde $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Finalmente, $x = \frac{1}{m}$ em (4), com $m \in \mathbb{N}$, fornece

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m}.$$

Vamos ver o que ocorre com os racionais negativos. Para isso, façamos $y = -x$ no item (a), obtendo

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

ou ainda

$$f(x) = -f(-x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Em particular, sendo $x < 0$ racional, segue de (5) e do fato de ser $-x$ um racional positivo que $f(x) = -f(-x) = -(-x) = x$, e portanto $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Como $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, desconfiamos que a função identidade seja a única satisfazendo as condições do enunciado. Para confirmar tal suposição, voltemos nossa atenção à condição do item (b). Inicialmente, mostremos que se para um certo $x \in \mathbb{R}$ tivermos $f(x) = 0$, então $x = 0$. De fato, caso fosse $x \neq 0$, fazendo $y = \frac{1}{x}$ em (b) teríamos

$$0 = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = 1,$$

o que é uma contradição. Agora, fazendo $y = x \neq 0$ em (b), obtemos

$$f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) \cdot f(x) = f(x)^2 > 0; \tag{6}$$

portanto, se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, e $a \neq 0$ for tal que $y - x = a^2$, então, aplicando sucessivamente (a), (5) e (6), obtemos

$$f(y) - f(x) = f(y) + f(-x) = f(y - x) = f(a^2) = f(a)^2 > 0,$$

de sorte que f é crescente. Suponha, por fim, que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < a$ e tome (cf. Problema 1.5.2 de [1]) um racional r tal que $f(a) < r < a$; o caráter crescente de f fornece

$$r = f(r) < f(a),$$

o que é uma contradição. Analogamente, não podemos ter $f(a) > a$, e a única possibilidade é $f(a) = a$. Mas como $a \in \mathbb{R}$ foi escolhido arbitrariamente, devemos ter $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Para o próximo exemplo precisamos da seguinte

Definição 4. *Se X é um conjunto não vazio e $f : X \to X$ é uma função dada, um elemento $x_0 \in X$ é dito um* **ponto fixo** *de f se $f(x_0) = x_0$.*

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, uma função decrescente $f : I \to I$ admite no máximo um ponto fixo. De fato, se $x_1, x_2 \in I$ fossem pontos fixos de f, com $x_1 < x_2$, seguiria de f ser decrescente que

$$x_1 = f(x_1) > f(x_2) = x_2,$$

uma contradição à hipótese $x_1 < x_2$.

Exemplo 5 (Argentina)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função decrescente e tal que $f(x + f(x)) = x + f(x)$ para todo real x. Prove que $f(f(x)) = x$ para todo real x.*

Prova. As hipóteses sobre f garantem que $x + f(x)$ é ponto fixo de f para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, o caráter decrescente de f garante, de acordo com a discussão anterior, a existência de no máximo um ponto fixo para f, de sorte que deve existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $x + f(x) = a$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é o mesmo que $f(x) = a - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto

$$f(f(x)) = f(a - x) = a - (a - x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Problemas

1. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

2. (Áustria). Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}\backslash\{0\} \to \mathbb{Q}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ para os quais $x + y$ seja múltiplo de 3, tenhamos
$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

3. (Vietnã). Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4},$$
para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.

4. (Espanha). Encontre todas as funções crescentes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $f(n + f(n)) = 2f(n)$.

5. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tais que:

   (a) $f(x + a) = f(x) + a$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $a \in \mathbb{Z}$.

(b) $f(f(x)) = 0$ para $x \in [0, 1)$.

6. (Áustria-Polônia). Prove que não existe função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$, tenhamos $f(x + f(y)) = f(x) - y$.

7. (Romênia). Ache todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $f(0) = 1$ e
$$f(f(k)) + f(k) = 2k + 3$$
para todo $k \in \mathbb{Z}$.

8. (Romênia). Sejam $k > 1$ um inteiro ímpar e $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ um conjunto de k números reais. Obtenha todas as funções injetivas $f : A \to A$ tais que
$$|f(x_1) - x_1| = |f(x_2) - x_2| = \cdots = |f(x_k) - x_k|.$$

9. Ache todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+^*$ tais que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

10. Ache todas as funções $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tais que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e
$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)$$
para todos os x, y tais que $x - y, x + y \in [0, 1]$.

Bibliografia

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

3. A. Engel. *Problem Solving Strategies.* Springer-Verlag, Nova Iorque, 1998.

Dicas e Soluções

1. Fazendo $g(x) = f(x) - f(0)$ na relação do enunciado, conclua que basta considerar o caso em que $f(0) = 0$. Sob tal suposição, faça $y = 0$ para obter $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Em seguida, use a relação do enunciado para concluir que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$, de sorte que $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

2. Use a relação do enunciado para provar por indução que $f(n) = f(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; em seguida, considere o caso $n < 0$.

3. Faça $x = y = z = 0$ para obter $f(0) = \frac{1}{2}$; em seguida, obtenha $f(1) = \frac{1}{2}$ de maneira análoga. Faça $y = z = 1$ para concluir que $f(x) \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por fim, utilize uma substituição análoga para concluir que $f(x) \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Em cada um dos intervalos $[n, n + f(n)]$ e $[f(n), 2f(n)]$ há $f(n) + 1$ naturais. Use, pois, o caráter crescente de f, juntamente com $f(n + f(n)) = 2f(n)$, para concluir que $f(n + k) = f(n) + k$, para todos $1 \leq k \leq f(n)$. Tome agora k, n naturais, com $n > k$. Use que $f(n) \geq n$ para mostrar que $f(n) > k$ e daí, pelo que fizemos acima, que $f(n) = n - 1 + f(1)$.

5. Faça $x = a = 0$ em (a) para concluir que $f(0) = 0$. Em seguida, fazendo $x = 0$ em (a), mostre que $f(a) = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$. Tomando agora $x \in [0, 1)$, use que $f(x) \in \mathbb{Z}$ e $f(f(x)) = 0$ para concluir que $f(x) = 0$. Por fim, para $x \in \mathbb{R}$ qualquer, troque x por $\{x\}$ e faça $a = \lfloor x \rfloor$ em (a) para concluir que $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

6. Comece calculando $f(x + f(y + f(0)))$ de duas maneiras distintas para concluir que $f(0) = 0$. Em seguida, deduza a partir daí que $f(f(y)) = -y$ para todo $y \in \mathbb{Z}$, de sorte que f é bijetiva. A partir dessa última relação, calcule $f(f(f(x)))$ de duas maneiras distintas para concluir que f é ímpar. Troque x por $f(x)$ na relação do enunciado para concluir que $f(f(x) + f(y)) = f(f(x + y))$, e daí que $f(x) + f(y) = f(x + y)$ para todos $x, y \in \mathbb{Z}$. Por fim, use indução para obter $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, chegando assim à contradição $-1 = f(f(1)) = f(1)f(1) \geq 0$.

7. Faça $k = 0$ para concluir que $f(1) = 2$; em seguida, use indução para mostrar que $f(n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Use agora a relação do enunciado para mostrar que se $f(-1) = a$, então não pode ser $a < 0$ nem $a > 0$. Por fim, faça uma nova indução para concluir que $f(-n) = -n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Inicialmente, podemos supor que f não tem pontos fixos. Escreva agora $A = B \cup C$, onde B e C são conjuntos disjuntos e tais que $f(x) > x$ para todo $x \in B$ e $f(x) < x$ para todo $x \in C$. Se $|B| = l$ e a é o valor comum de $|f(x_j) - x_j|$, conclua que $0 = \sum_{j=1}^{k}(f(x_j) - x_j) = (2l - k)a$ e, a partir daí, que $a = 0$, o que é uma contradição.

9. Faça $x = y = 0$ para obter $f(0) = 1$. Em seguida, use indução para provar que $f(nx) = f(x)^n$ para todos $x \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$; mostre a partir daí que $f(x) = f(1)^x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_+^*$. Fazendo agora $y = -x$, mostre que $f(-x) = f(x)^{-1}$; conclua então que $f(x) = f(1)^x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Por fim, use o fato de o contradomínio de f ser o conjunto dos racionais positivos para concluir que $f(1) = 1$.

10. Fazendo $x + y = a$ e $x - y = b$, mostre que $f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, para todos $a, b \in [0, 1]$. Fazendo $x = y$, mostre que $f(2x) = 2f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, e conclua que $f(a) + f(b) = f(a + b)$, para todos $a, b \in [0, 1]$. Mostre a partir daí que $f(x) = x$, para todo $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Para o que falta, imite a sugestão para a passagem de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, no Exemplo 3.