Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Antonio Caminha

Aula 4

Funções Definidas Implicitamente 2

Nesta segunda aula sobre funções definidas implicitamente, examinamos e propomos alguns exemplos mais elaborados. Para muitos mais, remetemos o leitor a [3] ou ao Capítulo 11 de [4].

Começamos observando que, por vezes, o que se pede não é obter todas as funções definidas implicitamente por certas relações, mas somente deduzir que tais funções satisfazem certas propriedades ou que, ao contrário, não existem. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Sejam c e α reais positivos dados e Q um quadrado no plano, também dado. Prove que não existe função sobrejetiva $f : [0,1] \to Q$ tal que, para todos $0 \leq x, y \leq 1$, tenhamos

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha+1/2}.$$

Prova. Suponha que exista uma tal função. Sejam $k > 1$ inteiro e $x_j = \frac{j}{k}$, para $0 \leq j \leq k$. Dado um real $x \in [x_j, x_{j+1}]$, temos

$$|f(x) - f(x_j)| \leq c|x - x_j|^{\alpha+1/2} \leq \frac{c}{k^{\alpha+1/2}}.$$

Portanto, sendo C_j o círculo do plano com centro $f(x_j)$ e raio $\frac{c}{k^{\alpha+1/2}}$, segue que

$$x \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow f(x) \in C_j.$$

Então

$$Q = f([0,1]) \subset C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1},$$

o que implica ($A(F)$ denota a área da figura F)

$$\begin{aligned} 1 &= A(Q) = A\left(\cup_{j=0}^{k-1} C_j\right) \leq \sum_{j=0}^{k-1} A(C_j) \\ &= k\pi\left(\frac{c}{k^{\alpha+1/2}}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{k^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Mas, como $\alpha > 0$ e $k > 1$ é arbitrário, chegamos a uma contradição, uma vez que a relação $k^{2\alpha} \leq \pi c^2$ não é verdadeira para k suficientemente grande. $\square$

Exemplo 2 (França)**.** Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção. Prove que existem naturais $a < b < c$, tais que $f(a) + f(c) = 2f(b)$

Prova. Se $g = f^{-1}$, o problema equivale a provarmos a existência de três inteiros positivos $x < y < z$, em PA e tais que $g(x) < g(y) < g(z)$. Faça $x = 1$ e seja $\alpha = g(1)$. Defina

$$A = \{g^{-1}(1), g^{-1}(2), \ldots, g^{-1}(\alpha - 1), g^{-1}(\alpha)\}.$$

Se $t \in \mathbb{N} \setminus A$, então $g(t) > \alpha = g(1) = g(x)$. Portanto, basta provarmos que existem dois inteiros $y < z$ em $\mathbb{N} \setminus A$ que formam uma PA com 1 e são tais que $g(y) < g(z)$.

Para o que falta, fixado $t \in \mathbb{N} \setminus A$, considere os inteiros

$$t, 2t - 1, 4t - 3, 8t - 7, \ldots, 2^k t - (2^k - 1), \ldots.$$

Quaisquer dois elementos consecutivos dessa sequência de números formam uma PA com 1, de modo que, se existir k tal que

$$g(2^k t - (2^k - 1)) < g(2^{k+1} t - (2^{k+1} - 1)),$$

nada mais haverá a fazer. Mas, se este não fosse o caso, a injetividade de g nos daria

$$g(t) > g(2t - 1) > g(4t - 3) > g(8t - 7) > \cdots > g(1),$$

o que seria um absurdo. $\square$

Voltemo-nos, agora, a exemplos mais difíceis onde se pede, efetivamente, obter todas as funções que satisfazem certos conjuntos de condições.

Exemplo 3 (Irã)**.** Obtenha todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos os x, y reais, tenhamos

$$f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy.$$

Solução. Seja f uma função satisfazendo as condições do enunciado. Fazendo $y = 0$, obtemos

$$f(f(x)) = f(x) + f(0) \cdot f(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Seja $\mathrm{Im}(f)$ a imagem de f e $c = f(0)$. Segue de (1) que

$$f(z) = (c + 1)z, \ \forall\, z \in \mathrm{Im}(f). \tag{2}$$

Agora, como $f(x + y) \in \mathrm{Im}(f)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, segue de (2) e da relação original que

$$(c + 1)f(x + y) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy$$

ou, ainda,

$$c \cdot f(x + y) = f(x)f(y) - xy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Suponha que $c \neq 0$. Então $0 \notin \mathrm{Im}(f)$. De fato, caso fosse $0 \in \mathrm{Im}(f)$ teríamos de (2) que $f(0) = 0$, uma contradição. Mas aí, pondo $x = c$, $y = -c$ em (3), obteríamos

$$c^2 = c \cdot f(0) = f(c)f(-c) + c^2,$$

donde $f(c)f(-c) = 0$ e, portanto, $f(c) = 0$ ou $f(-c) = 0$; isto, por sua vez, contradiria a suposição de que $0 \notin \mathrm{Im}(f)$. Logo, $c = 0$.

Segue, pois, de (3), que

$$f(x)f(y) = xy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Como a função identicamente nula não satisfaz as condições do enunciado, existe $z_0 \in \mathrm{Im}(f)$ tal que $z_0 \neq 0$. Então, temos a partir de (2) que $f(z_0) = z_0$. Assim, fazendo $y = z_0$ em (4), obtemos $f(x) \cdot z_0 = xz_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por fim, é imediato verificar que a função identidade satisfaz a condição do enunciado.

□

Antes de apresentar o próximo exemplo, precisamos enunciar um resultado que se revela importante também em outros contextos. Para tanto, recordamos o leitor de que uma **função polinomial** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde n é um inteiro não negativo dado e $a_0, \ldots, a_n$ são números reais também dados.

Teorema 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Se a, b e d são números reais tais que $a < b$ e $(f(a) - d)(f(b) - d) < 0$, então existe $a < c < b$ tal que $f(c) = d$.*

O teorema acima é conhecido em Matemática como o **teorema do valor intermediário**. (Abreviamos **TVI**.) Intuitivamente, sua validade decorre do fato de que, o gráfico de uma função polinomial não tem *saltos*; portanto, se ele passar pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, e d pertencer ao intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$ (que é o que garante a condição $(f(a) - d)(f(b) - d) < 0$), então tal gráfico deve intersectar a reta $y = d$ ou, o que é o mesmo, deve existir $a < c < b$ tal que $f(c) = d$.

O TVI, de fato, pode ser aplicado a uma classe de funções bem mais ampla que aquela das funções polinomiais, qual seja, aquela das funções **contínuas**; intuitivamente, o leitor pode pensar numa função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ um intervalo), como uma função cujo gráfico não admite interrupções. Para uma discussão mais adequada desse conceito, juntamente com uma prova do TVI para tal classe de funções, remetemos o leitor à Seção 4.2 de [1]. Também, uma prova do TVI para funções polinomiais, baseada na validade do teorema fundamental da Álgebra, pode ser encontrada na Seção 5.1 de [2].

Precisamos, ainda, da seguinte consequência do TVI.

Corolário 5. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial como em (5), com n ímpar, então a imagem de f é todo o conjunto dos números reais.*

Prova. Dado $d \in \mathbb{R}$, faça $g(x) = f(x) - d$. Então $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é polinomial, e basta garantirmos a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(c) = 0$.

O argumento do parágrafo anterior reduz nosso problema a mostrar a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. Para tanto, suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_n > 0$.

Então, para $x \neq 0$, repetidas aplicações da desigualdade triangular fornecem

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x^n} &= a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \\
&\geq a_n - \left| \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| \\
&\geq a_n - \left| \frac{a_{n-1}}{x} \right| - \cdots - \left| \frac{a_1}{x^{n-1}} \right| - \left| \frac{a_0}{x^n} \right| \\
&= a_n - \frac{|a_{n-1}|}{|x|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|x|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|x|^n}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $|x| \geq 1$, então $|x| \leq |x|^2 \leq \cdots \leq |x|^n$ e, daí,

$$\frac{f(x)}{x^n} \geq a_n - \frac{1}{|x|} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|,$$

o qual, por sua vez, é positivo para $|x| > \frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|$.

Em resumo, se

$$A > \max \left\{ 1, \frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \right\},$$

então $\frac{f(x)}{x^n} > 0$ para $x = \pm A$. Mas, como n ímpar, segue que $f(-A) < 0 < f(A)$ e o TVI garante a existência de $c \in [-A, A]$ tal que $f(c) = 0$. $\square$

Podemos, por fim, discutir o exemplo a seguir.

Exemplo 6 (Bielorrússia)**.** Encontre todas as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos

$$f(x + y^3) + g(x^3 + y) = h(xy).$$

Solução. Fazendo $x = y = 0$, obtemos $f(0) + g(0) = h(0)$. Assim, definindo $f_1(x) = f(x) - f(0)$, $g_1(x) = g(x) - g(0)$ e $h_1(x) = h(x) - h(0)$, temos

$$f_1(x + y^3) + g_1(x^3 + y) = h_1(xy),$$

com $f_1(0) = g_1(0) = h_1(0) = 0$. Podemos, portanto, começar supondo que $f(0) = g(0) = h(0) = 0$.

Fazendo $y = -x^3$ na relação do enunciado, obtemos $g(x - x^9) = h(-x^4)$ para todo x. Fazendo $x = -y^3$, obtemos $f(-y^9 + y) = h(-y^4)$, para todo $y \in \mathbb{R}$; daí, segue que $f(x - x^9) = g(x - x^9)$. Mas a imagem da função polinomial $x \mapsto x - x^9$ é o conjunto dos números reais, de modo que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A relação do enunciado se reduz, então, a

$$f(x + y^3) + f(x^3 + y) = h(xy). \qquad (6)$$

Fazendo sucessivamente $y = -x^3$ e $x = -y^3$ em (6), e levando em conta que $f(0) = 0$, obtemos, respectivamente,

$$f(x - x^9) = h(-x^4) \ \text{ e } \ f(-y^9 + y) = h(-y^4),$$

de modo que $f(x - x^9) = f(-x^9 + x)$. Usando de novo o fato de que a imagem da função polinomial $x \mapsto x - x^9$ é $\mathbb{R}$, segue que f é uma função par, i.e., tal que que $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fazendo, agora, $y = 0$ em (6), obtemos $f(x) + f(x^3) = 0$, donde $f(x) = -f(x^3)$. Voltando a (6), essa relação nos dá

$$f(x^3 + y) - f((x + y^3)^3) = h(xy).$$

Mas f par implica, então, que

$$f(x^3 + y) - f(-(x + y^3)^3) = h(xy).$$

Segue, daí, que, se $a \in \mathbb{R}$ for tal que existam reais x, y satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} xy = a \\ x^3 + y = -(x + y^3)^3 \end{cases},$$

então $h(a) = 0$. Provemos que esse é o caso para todo $a \leq 0$.

Se $a = 0$, já temos $h(a) = 0$. Se $a \neq 0$ então a segunda equação do sistema acima equivale a $y^9 + 3y^6x + 3x^2y^3 + y + 2x^3 = 0$. Escrevendo $x = \frac{y}{a}$, segue que basta verificarmos a existência de um real y tal que

$$y^{12} + 3ay^8 + (3a^2 + 1)y^4 + 2a^3 = 0.$$

Para tanto, seja $p(y) = y^{12} + 3ay^8 + (3a^2 + 1)y^4 + 2a^3$. Se $a < 0$, então $p(0) = 2a^3 < 0$ e $p(-a) > 0$, de modo que o TVI garante que p tem ao menos uma raiz real.

Para terminarmos, veja que $f(x - x^9) = h(-x^4)$, de modo que $f(x - x^9) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando novamente a sobrejetividade de f, segue que $f \equiv 0$. Daí, (6) nos dá $h \equiv 0$.

Então, as funções f, g, h que satisfazem as condições do enunciado são as funções constantes $f \equiv f(0)$, $g \equiv g(0)$, $h \equiv h(0)$, tais que $f(0) + g(0) = h(0)$. $\square$

Problemas

1. (IMO). Seja G um conjunto não vazio de funções afins, possuindo as seguintes propriedades:

   (a) Se $f, g \in G$, então $f \circ g \in G$.

   (b) Se $f \in G$, então $f^{-1} \in G$.

   (c) Para toda $f \in G$, existe $x_f \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_f) = x_f$.

   Prove que existe um real x_0 tal que $f(x_0) = x_0$, para toda $f \in G$.

2. (IMO). Seja $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ uma função tal que, para um certo $a \in \mathbb{R}$, tenhamos

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que f é **periódica**, i.e., que existe um real $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Para $a = 1$, dê um exemplo de uma função não constante $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ que satisfaça a relação do enunciado.

3. (Lituânia). Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que $f(m^2 + f(n)) = f(m)^2 + n$ para todos m, n inteiros.

   (a) Prove que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

   (b) Ache todas essas funções.

4. (OIM). Encontre todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo, para todos $x, y \in \mathbb{N}$, as duas condições a seguir:

   (a) $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

   (b) $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$

5. (Bulgária). Sejam $n > 1$ inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos dados. Prove que a equação

$$\sqrt{1 + a_1 x} + \sqrt{1 + a_2 x} + \cdots + \sqrt{1 + a_n x} = nx$$

possui exatamente uma solução real positiva

6. (Romênia – adaptado). Existe uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x+1) \notin \mathbb{Q}?$$

7. (IMO). Ache todas as funções $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as duas condições a seguir:

   (a) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$, para todos $x, y \in [0, +\infty)$.

   (b) $f(2) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$.

8. (IMO). Seja $S = \{x \in \mathbb{R}; x > -1\}$. Obtenha todas as funções $f : S \to S$ que satisfaçam as duas condições a seguir:

   (a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x))$, para todos $x, y \in S$.

   (b) $\frac{f(x)}{x}$ é crescente em cada um dos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$.

9. (Polônia). Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ satisfazendo, para todo racional positivo x, as seguintes condições:

(a) $f(x+1) = f(x) + 1$.

(b) $f(x^3) = f(x)^3$.

10. (IMO). Decida se existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo as condições a seguir:

    (a) $f(1) = 2$.

    (b) $f(n) < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (c) $f(f(n)) = f(n) + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Bibliografia

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 3*: Introdução à Análise.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 6*: Introdução à Análise.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

3. D. Djukić, V. Janković, I. Matić e N. Petrović. *The IMO Compendium: a Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads from 1959-2004.* Springer-Verlag, Nova Iorque, 2006.

4. A. Engel. *Problem Solving Strategies.* Springer-Verlag, Nova Iorque, 1998.

Dicas e Soluções

1. Inicialmente, mostre que basta provar que duas funções quaisquer em G comutam em relação à operação de composição de funções. Para tanto, use os itens (a) e (b), juntamente com o fato de que a única função $h \in G$ da forma $h(x) = x + a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, é $h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

2. Para o item (a), fazendo $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$, mostre que $g(x+a) = \sqrt{\frac{1}{4} - g(x)^2}$ e, daí, que $g(x + 2a) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Quanto a (b), faça $h(x) = 4g(x)^2 - \frac{1}{2}$ e conclua que $h(x+1) = -h(x)$; em seguida, mostre que $h(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2}$ é uma possibilidade.

3. Para o item (a), comece fazendo $m = 0$ na relação do enunciado para obter $f(f(n)) = f(0)^2 + n$, concluindo, assim, que f é bijetiva. Em seguida, tome $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(k) = 0$ e seja $l = f(0)$; então temos $l = f(0) = f(f(k)) = f(0)^2 + k = l^2 + k$, ao passo que, fazendo $m = k$ e $n = 0$ na relação do enunciado, temos $k^2 + l = k$. Logo, $k = l = 0$. Quanto a (b), faça $m = 1$ e $n = 0$ na relação do enunciado para obter $f(1) = 1$; em seguida, deduza que $f(f(n)+1) = n + 1$ e, a partir daí, que $f(n) = n$ para todo inteiro não negativo n. Por fim, estenda o argumento aos inteiros negativos, mostrando que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

4. Fazendo $x = y = 1$, conclua que $f(1) = 1$. Em seguida, mostre que $f(f(xy)) = x^2y^2f(xy) = f(f(x)f(y))$, obtendo, então, que $f(xy) = f(x)f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{N}$; conclua a partir daí, que $f(x^2) = f(x)^2$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Por fim, se $f(x) < x^2$ para um certo $x \in \mathbb{N}$, escreva $f(x)^3 = f(x^3) > f(xf(x)) = x^2f(x)^2$ para obter $f(x) > x^2$, uma contradição; analogamente, mostre que não pode ser $f(x) > x^2$, de sorte que $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{N}$.

5. Divida ambos os membros da equação por x e, em seguida, aplique o TVI.

6. Comece observando que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x+1) - f(x)$ é contínua e, pela condição do enunciado, transforma todo número real num irracional. Agora, use o TVI, juntamente com o fato de que todo intervalo não degenerado contém números irracionais, para concluir que g é constante; então, use isto para mostrar que $f(x+2) - f(x)$ é sempre irracional. Por fim, mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \in \mathbb{Q}$ e, daí, que $f(x_0 + 2) - f(x_0) \in \mathbb{Q}$.

7. Troque x por $x - 2$ e y por 2 em (a) para concluir que $f(x) = 0$ para $x \geq 2$. Faça, agora, $x = y = 0$ em (a) para obter, a partir de (b), que $f(0) = 1$. Por fim, para $0 < x < 2$, troque y por $2 - x$ em (a) para concluir que $f(x) \geq \frac{2}{2-x}$; por outro lado, mostre que $f\left(x + \frac{2}{f(x)}\right) = f(2)f(x) = 0$ e conclua que $f(x) \leq \frac{2}{2-x}$ para cada um de tais x.

8. Observe inicialmente que, a partir de (b), f tem no máximo um ponto fixo em cada um dos intervalos $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$. Se existir um ponto fixo x_0 de f tal que $-1 < x_0 < 0$, faça $x = y = x_0$ em (a) para concluir que $x_0^2 + 2x_0$ também é ponto fixo de f, e daí

que $x_0^2 + 2x_0 = x_0$, o que é uma contradição. Argumente analogamente para concluir que f não tem pontos fixos em $(0, +\infty)$. Por fim, fazendo $x = y$ em (a), conclua que $f(x) = -\frac{x}{x+1}$ para todo $x \in S$.

9. Observe que, por (a), temos $f(x+k) = f(x) + k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Tome, agora, $m, n \in \mathbb{N}$ e use que $\frac{(n^2+m)^3 - n^3}{n^3} \in \mathbb{N}$ para calcular

$$f\left(\frac{m^3}{n^3} + \frac{(n^3+m)^3 - n^3}{n^3}\right)$$

de duas maneiras distintas, obtendo a equação

$$(a + n^2)^3 = a^3 + (n^6 + 3n^3m + 3m^2),$$

onde $a = f\left(\frac{m}{n}\right)$. Conclua, a partir daí, que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

10. Considere a **sequência de Fibonacci** $(F_n)_{n\geq 1}$, dada por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, para todo inteiro $k \geq 1$. Comece mostrando, por indução, o **teorema de Zeckendorff**: todo número natural pode ser unicamente escrito como soma de números de Fibonacci de índices maiores que 1 e não consecutivos. Voltando ao problema em questão, observe que, se uma tal f existir, então $f(F_k) = F_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, utilize o teorema de Zeckendorff para mostrar que uma possibilidade para f é definirmos

$$f(F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_j}) = F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + \cdots + F_{i_j+1},$$

para todos $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j$ naturais.