Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 6

Números Complexos

Definição 1
O conjunto dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$, consiste de todos os pares ordenados (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$. Definiremos que $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Chamaremos de unidade imaginária o complexo $i = (0, 1)$. Usando a operação de multiplicação verificamos que $i \cdot i = i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$. Vamos fazer um abuso de linguagem matemática e definir que $(-1, 0) = -1$, sendo assim definiremos os números complexos como as expressões da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$, ou seja,

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + bi |\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1. \right\}$$

O número a é chamado de parte real de z e o número b é chamado de parte imaginária de z. Com isso, fica fácil perceber que se um número complexo que tem parte imaginária igual a zero será um número real.

Dois números complexos são iguais se, e somente se, eles possuem a mesma parte real e a mesma parte imaginária, isto é,

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

A *soma* e o *produto* de dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ são definidos assim:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \quad \text{e} \quad z.w = \ (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

O número complexo $\overline{z} = a - bi$ será chamado de **conjugado** do número complexo $z = a + bi$. É fácil perceber que z é um número real se, e somente se, $z = \overline{z}$. Usaremos o conjugado do número complexo $z = a + bi$ para poder representar o complexo $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} . \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

A partir do resultado acima faremos $\frac{z_1}{z_2} = z_1 . \frac{1}{z_2}$, onde z_1 e z_2 são números complexos.
Vejamos abaixo algumas propriedades as quais deixaremos as provas com o leitor:

1. $z = \overline{\overline{z}}$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$
4. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

O valor absoluto, ou **módulo** de um número complexo $z = a + bi$ é definido por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z.\overline{z}}.$$

Vejamos agora algumas propriedades do módulo de um número complexo:
1. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
2. $z.\overline{z} = |z|^2$
3. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
4. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, $z \neq 0$
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Prova:
Observe que $|z_1+z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2+z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2+|z_2|^2$.
Por outro lado, $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, assim:

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \cdot Re\left(z_1 \cdot \overline{z_2}\right) \leq 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| = 2|z_1| \cdot |z_2|,$$

portanto, $|z_1 + z_2|^2 \leq \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$. Finalmente, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
7. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
A demonstração das outras propriedades fica a cargo do leitor.

Exercícios Resolvidos

1. Resolva a equação $z^3 = 18 + 26i$, onde $z = x + yi$ e x, y são números inteiros.
Solução:
$(x+yi)^3 = (x+yi)^2(x+yi) = (x^2-y^2+2xyi)(x+yi) = (x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3) = 18+26i$.
Usando a definição de igualdade de números complexos, obtemos:

$$\begin{cases} x^3 & - & 3xy^2 & = & 18 \\ 3x^2y & - & y^3 & = & 26 \end{cases}$$

Fazendo $y = tx$ na igualdade $18(3x^2y - y^3) = 26(x^3 - 3xy^2)$, observamos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ implica $18(3t-t^3) = 26(1-3t^2)$. A última relação é equivalente a $(3t-1)(3t^2-12t-13) = 0$. A única solução racional da equação é $t = \dfrac{1}{3}$, então,

$$x = 3,\ y = 1 \text{ e } z = 3 + i.$$

2. Prove a identidade

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

para todos os complexos z_1 e z_2.
Solução:
Usando $z.\overline{z} = |z|^2$, temos que

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})$$
$$= |z_1|^2 + z_1.\overline{z_2} + z_2.\overline{z_1} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - z_1.\overline{z_2} - z_2.\overline{z_1} + |z_2|^2$$
$$2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

3. (Croácia) No conjunto dos números complexos resolva a equação $\left(x^2 - a^2\right)^2 - 4ax - 1 = 0$, em que a é um número real.
Solução:

$$\left(x^2 - a^2\right)^2 - 4ax - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 + a^2\right)^2 - 4a^2x^2 - 4ax - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 + a^2\right)^2 - (2ax + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 + a^2 - 2ax - 1\right)\left(x^2 + a^2 + 2ax + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left[(x - a)^2 - 1\right]\left[(x + a)^2 + 1\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - a - 1)(x - a + 1)(x + a - i)(x + a + i) = 0.$$

$x = a + 1$, $x = a - 1$, $x = -a + i$ e $x = -a - i$.

4. (AIME) Sejam $w_1,\ w_2,\ \ldots, w_n$ números complexos. Uma reta L no plano complexo é chamada de *reta média* para os pontos $w_1,\ w_2,\ \ldots, w_n$ se L contém pontos (números complexos) $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_n$ tais que

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k - w_k) = 0.$$

Para os números $w_1 = 32 + 170i$, $w_2 = -7 + 64i$, $w_3 = -9 + 200i$, $w_4 = 1 + 27i$ e $w_5 = -14 + 43i$ existe uma única reta média que intersecta o eixo y no ponto $(0, 3)$. Determine o coeficiente angular desta reta média.

Solução:
Seja $y = mx + b$ uma reta média para os complexos $w_k = u_k + iv_k$, onde u_k e v_k, e $k = 1,\ 2, 3,\ \ldots, n$. Assuma que os números complexos $z_k = x_k + iy_k$, onde x_k e y_k são números reais escolhidos sobre a reta $y = mx + b$, assim

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k - w_k) = 0.$$

Então

$$\sum x_k = \sum u_k, \quad \sum y_k = \sum v_k,$$

com $y_k = mx_k + b$, $1 \le k \le n$. Consequentemente,

$$\sum v_k = \sum y_k = \sum (mx_k + b) = m \sum x_k + nb = \left(\sum u_k\right) m + nb.$$

Nesse caso, $n = 5$, $b = 3$, $\sum u_k = 3$ e $\sum v_k = 504$. Segue que $504 = 3m + 15 \Leftrightarrow m = 163$.

5. Se a, b e n são números inteiros e positivos, prove que existem inteiros x e y tais que $\left(a^2 + b^2\right)^n = x^2 + y^2$.
Solução:

Seja $z = a + bi$. Então, $\left(a^2 + b^2\right)^n = \left(|z|^2\right)^n = |z|^{2n} = (|z|^n)^2$. Mas, $z^n = x + iy$, com x e y inteiros (pois a e b são inteiros). Portanto, $(|z|^n)^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$.

6. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função tal que $f(z)f(iz) = z^2$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Prove que $f(z) + f(-z) = 0$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$.
Solução:

Substitua z por iz na igualdade $f(z)f(iz) = z^2$, então $f(iz)f(-z) = -z^2$. Somando as duas igualdades temos que $f(iz)\left(f(z) + f(-z)\right) = 0$ então $f(iz) = 0$ ou $f(z) + f(-z) = 0$. Da igualdade $f(z)f(iz) = z^2$ deduzimos que $f(z) = 0$ se, e somente se, $z = 0$. Se $z \neq 0$, então $f(iz) \neq 0$ e, com isso, $f(z) + f(-z) = 0$ e, se $z = 0$, então $f(z) + f(-z) = 2f(0) = 0$. Portanto, $f(z) + f(-z) = 0$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Um exemplo de função que satisfaz $f(z)f(iz) = z^2$ é $f(z) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) z$.

7. Se x é um número real, prove que todos os números complexos de módulo 1 podem ser escritos na forma

$$\frac{x + i}{x - i}.$$

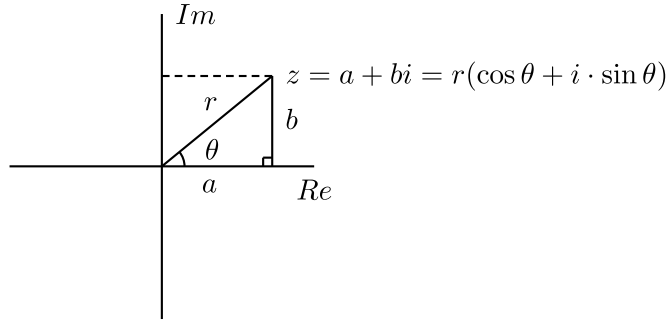
Solução:

Para começar seja $(a + bi)^2 = (a - bi)(a + bi)\dfrac{a + bi}{a - bi} = \left(a^2 + b^2\right)\dfrac{\frac{a}{b} + i}{\frac{a}{b} - i}$, e use o fato que $a^2 + b^2 = 1$. Faça $z = (a + bi)^2$ e $\dfrac{a}{b} = t \in \mathbb{R}$. Assim, $|z| = |\,(a + bi)^2\,| = a^2 + b^2 = 1$ e $z = \dfrac{t + i}{t - i}$, $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2
Todo número complexo $z = a + bi$ pode ser escrito na **forma trigonométrica**

$$z = r(\cos\theta + i \cdot \sin\theta),$$

onde $r = |z|$ e θ o ângulo (em radianos) que a reta, que liga a origem ao ponto z, forma com o eixo positivo real. O ângulo θ é chamado de **argumento** de z.



O conjugado do complexo $z = a + bi$, tem a forma trigonométrica

$$\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta)) = r(\cos\theta - i \cdot \sin\theta),$$

com isso,

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos\theta - i \cdot \sin\theta)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \cdot \sin\theta).$$

Teorema 1
Seja n um inteiro, r e θ números reais, então

$$[r(\cos\ \theta + i \cdot \sin\ \theta)]^n = r^n \left(\cos\ n\theta + i \cdot \sin\ n\theta\right).$$

Prova:
Vamos provar que a igualdade é válida para $n \in \mathbb{N}$ e, em seguida, provemos para $n \in \mathbb{Z}$. Para isso usaremos o princípio da indução finita.

Se $n = 0 \Rightarrow z^0 = 1$ e $r^0 \left(\cos 0 + i \cdot \sin 0\right) = 1$. Vamos admitir a validade da fórmula para $n = k - 1$:

$$z^{k-1} = r^{k-1} \cdot \left[\cos\left(k-1\right)\theta + i \cdot \sin\left(k-1\right)\theta\right]$$

e agora provemos a validade da igualdade para $n = k$:

$$z^k = z^{k-1} \cdot z = r^{k-1} \cdot \left[\cos\left(k-1\right)\theta + i \cdot \sin\left(k-1\right)\theta\right] \cdot r \cdot \left(\cos\theta + i \sin\theta\right) =$$

$$r^k \left(\cos\ k\theta + i \cdot \sin\ k\theta\right)$$

Fica como exercício provar que a igualdade é válida para n negativo. Para isso, use que $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2

Seja n um inteiro positivo e z um número complexo. Existem n raízes n - ésimas de z, que são assim definidas

$$\omega_i = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right).$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Prova:

Para mostrar este resultado, inicialmente ω e z nas respectivas formas trigonométricas, ou seja,

$$\omega = s(\cos\phi + i\cdot\sin\phi) \text{ e } z = r(\cos\theta + i\cdot\sin\theta).$$

com $s \geq 0$ e $r \geq 0$. Com isso,

$$z = r(\cos\theta + i\cdot\sin\theta) = \omega^n = s^n(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)^n = s^n(\cos\ n\phi + i\cdot\sin\ n\phi),$$

resultando,

$$s = r^{\frac{1}{n}} \text{ e } n\phi = \theta + 2k\pi, \text{ para algum inteiro } k.$$

Com isso, teremos n raízes n - ésimas de z.

Exercícios Resolvidos

01. Calcule $\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$.

Solução:

Seja $z = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, então $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, com isso $\cos\theta = -\frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, a forma trigonométrica será, $z = 1.\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,
então $z^{100} = 1^{100}\left(\cos\frac{200\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{200\pi}{3}\right) = 1.\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

02. As seis soluções de $z^6 = -64$ são escritas na forma $a + bi$, onde a e b são números reais. Qual é o produto das soluções com $a > 0$?

Solução:

O teorema 2 implica que as seis raízes sextas de

$$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$$

são

$$z_k = 64^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right),$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5.

Verificando, concluímos que apenas $z_0 = \sqrt{3} + i$ e $z_5 = \sqrt{3} - i$, tem a parte real positiva, então $z_0 \cdot z_5 = 4$.

3. Prove que $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} + \dfrac{1}{2} = 0$.

Solução:
Se $z = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$ e $\overline{z} = \cos\theta - i \cdot \sin\theta$. Então, $\cos\theta = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$. Assim, seja $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{7}$, então $z^7 = 1$. Portanto,

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \frac{1}{2} = 0.$$

Multiplicando tudo por $2z^3$ e organizando as parcelas, temos:

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

ou seja,

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0.$$

4. (OPM) As raízes quintas do número 1 são as soluções da equação $x^5 - 1 = 0$. Uma dessas raízes é $\epsilon = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{5}$.
a) Dê as demais soluções da equação em função de ϵ.
b) Calcule a soma dos cubos das 5 raízes.
c) Calcule a soma das décimas potências das 5 raízes.
d) Generalize, se possível, os resultados anteriores para as n raízes n - ésimas de 1.

Solução:
a) As soluções da equação são: $\cos\dfrac{2k\pi}{5} + i \cdot \sin\dfrac{2k\pi}{5}$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ e são, respectivamente, iguais a ϵ, ϵ^2, ϵ^3, ϵ^4 e $\epsilon^5 = 1$.
b) $S = \epsilon^3 + \epsilon^6 + \epsilon^9 + \epsilon^{12} + \epsilon^{15} = \epsilon^3 + \epsilon + \epsilon^4 + \epsilon^2 + 1 = 0$ pois a soma das cinco raízes é o coeficiente de x^4 na equação dada.
c) $\epsilon^{10} + \epsilon^{20} + \epsilon^{30} + \epsilon^{40} + \epsilon^{50} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$.
d) A soma das potências k das n raízes n - ésimas da unidade é igual a 0 se k não divide n e é igual a n, se k divide n.
Demonstração:
Tomando - se uma raiz primitiva z da unidade podemos escrever todas as raízes n - ésimas como potências de z: $z^1,\ z^2,\ z^3,\ \ldots, z^n$. Logo as potências de grau k serão: $z^k,\ z^{2k},\ z^{3k},\ \ldots, z^{nk}$.
Supondo que k não divide n, $z^k \neq 1$. Nesse caso a soma das potências k das n raízes será dada por:

$$S_k = \frac{z^k\left(z^{kn} - 1\right)}{z^k - 1}.$$

Como $z^n = 1$, $z^{kn} = 1$ e $S_k = 0$.
Se k é múltiplo de n, as potências de z: z^k, z^{2k}, z^{3k},..., z^{nk} serão todas iguais a 1. Logo a soma será $S_k = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$.

5. Seja $f(x) = \cos x + i \cdot \sin x$.
(a) Prove que $f(0) = 1$ e $f(x)f(y) = f(x+y)$ para quaisquer x e y reais.
(b) Suponha que a função g satisfaz $g(0) = 1$ e $g(x)g(y) = g(x+y)$ para quaisquer x e y reais. Prove que essa função satisfaz:
(i) $g(x) \neq 0$ para todo x.
(ii) $g(x-y) = \dfrac{g(x)}{g(y)}$ para quaisquer x e y reais.
(iii) $[g(x)]^n = g(nx)$ para quaisquer x e y reais e n inteiro positivo.
(iv) $g(-x) = \dfrac{1}{g(x)}$.
(c) Dê exemplo de uma função g tal que $g(0) = 1$ e que satisfaz $g(x)g(y) = g(x+y)$ para quaisquer x e y reais.

Solução:
(a) Temos que $f(0) = \cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1 + 0i = 1$. Além disso,

$$f(x)f(y) = (\cos x + i \cdot \sin x)(\cos y + i \cdot \sin y)$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i \cdot (\sin x \cos y + \cos x \sin y)$$

$$= \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y)$$

$$f(x+y)$$

(b) Fazendo $y = -x$ em $g(x)g(y) = g(x+y)$ temos que $g(x)g(-x) = g(0) = 1$ para todo x. Portanto, não podemos ter $g(x) = 0$ para algum x, assim $g(x)g(-x) \neq 0$.
Como $g(x)g(y) = g(x+y)$, dividindo ambos os lados por $g(y)$ temos que $g(x) = \dfrac{g(x+y)}{g(y)}$.
Fazendo $x + y =$, temos que $x = z - y$, ou seja, $g(z-y) = \dfrac{g(z)}{g(y)}$, o que a prova (ii). A identidade $[g(x)]^n = g(nx)$ é uma consequência imediata de $g(x)g(y) = g(x+y)$. Vamos usar indução para provar. Veja que $[g(x)]^1 = g(x)$ e se $[g(x)]^k = g(kx)$ para algum inteiro positivo k, então

$$[g(x)]^{k+1} = g(x)\,[g(x)]^k = g(x)g(kx) = g(x+kx) = g((k+1)x).$$

Isto mostra que se $[g(x)]^n = g(nx)$ ocorre para $n = k$, então ocorre também para $n = k+1$.
Além disso, se $g(0) = 1$ e $\dfrac{g(x)}{g(y)} = g(x-y)$, fazendo $x = 0$ temos que $\dfrac{1}{g(y)} = g(-y)$.

(c) Um exemplo de função que satisfaz todas as propriedades é $g(x) = 2^y$, pois $g(0) = 2^0 = 1$ e

$$g(x)g(y) = 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} = g(x+y).$$

Isto nos motiva a fazer a seguinte definição (não será exibida a prova desta afirmação neste material):

Para todo x real, temos que

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x.$$

Fazendo $x = \pi$, na igualdade acima, encontramos uma maravilhosa igualdade

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Nas aulas 8 e 9 estudaremos várias aplicações das raízes da unidade. Deixaremos a abordagem geométrica dos números complexos para a aula 21 de Geometria.

Exercícios propostos

1. Prove que se $|z_1| = |z_2| = 1$ e $z_1 z_2 \neq -1$, então $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ é um número real.

2. Seja $z \in \mathbb{C}^*$ tal que $\left| z^3 + \dfrac{1}{z^3} \right| \leq 2$. Prove que $\left| z + \dfrac{1}{z} \right| \leq 2$.

3. Ache todos os números complexos z tais que
$$|z| = 1 \text{ e } |z^2 + \overline{z}^2| = 1.$$

4. Seja $z_k = 3^{-k} + 2^{-k} i,\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z_k$.

5. Seja $z_k = a_k + i b_k,\ k = 1, 2,$ onde $a_k,\ b_k \in \mathbb{R}$. Se $z_1 = 3z_2$ e $z_1 = (1+2i)^4$. Ache a_2 e b_2.

6. Seja $z = x + yi$. Se $|z - 6| = 5$ e $|z| = 5$, ache todos os possíveis valores de x e y.

7. Ache todos os números complexos z tais que
$$(3z + 1)(4z + 1)(6z + 1)(12z + 1) = 2.$$

8. Resolva o sistema de equações:
$$x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3$$
$$y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0.$$

9. (OCM) Sejam a e z números complexos tais que $|a| < 1$ e $\overline{a}z \neq 1$. Mostre que se $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$ então $|z| < 1$.

10. (OCM) Uma lista de números complexos distintos $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_n$ é um ciclo de comprimento n para uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se $z_2 = f(z_1),\ z_3 = f(z_2),\ \ldots, z_n = f(z_{n-1})$ e $z_1 = f(z_n)$. Seja $f(z) = z^2 + 2003$ e $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_{2003}$ um ciclo de comprimento 2003. Calcule
$$\prod_{i=1}^{2003} (f(z_i) + z_i),$$
onde o símbolo $\prod$ indica o produto.

11. Sejam $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ números complexos tais que $|z_1+z_2| = \sqrt{3}$ e $|z_1| = |z_2| = 1$. Calcule $|z_1 - z_2|$.

12. (Putnam) Prove que se $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$, então $|z| = 1$.

13. Seja z um número complexo tal que $z \in \mathbb{C}\ - \mathbb{R}$ e
$$\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}.$$
Prove que $|z| = 1$.

14. (Espanha) Resolva o sistema se equações no conjunto dos números complexos:
$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = 1,$$
$$z_1 z_2 z_3 = 1.$$

15. Ache todos os números complexos z tais que $|z| = 1$ e
$$\left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1.$$

16. Ache todos os pares ordenados (a, b) de números reais tais que $(a + bi)^{2002} = a - bi$.

17. Prove que
$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

18. Sejam $a,\ b,\ c$ números reais tais que

$$\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0.$$

Prove que

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0.$$

19. Prove que

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

20. Prove que

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

21. Sejam $a,\ b,\ c$ números reais tais que

$$\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0.$$

Prove que

$$\cos(a+b+c) = \frac{1}{3}(\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c),$$
$$\sin(a+b+c) = \frac{1}{3}(\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c).$$

22. (Croácia) Determine os valores mínimo e máximo, caso existam, da expressão $|z - \frac{1}{z}|$, em que z é um número complexo tal que $|z| = 2$.

23. (OCM) Determinar todos os subconjuntos S dos números complexos que satisfazem aos seguintes requisitos:
1. Se $x,\ y \in S$, então $xy \in S$.
2. S possui 2002 elementos.

24. (Mandelbrot) O número complexo $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)^8 + \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)^8$ é um número inteiro. Qual?

25. (Mandelbrot) Se $\omega^{1997} = 1$ e $\omega \neq 1$, então determine o valor de

$$\frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1+\omega^2} + \ldots + \frac{1}{1+\omega^{1997}}.$$

26. (Romênia) Resolva em $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, as seguintes equações:
a) $|z-a|+|z-b|=b-a$.
b) $|z|+|z-1|+|z-2|+|z-3|=4$.

27. (AIME) Seja $F(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$ para qualquer complexo $z\neq i$, e seja $z_n=F(z_{n-1})$ para todo inteiro positivo n. Dado que $z_0=\dfrac{1}{137}+i$ e $z_{2002}=a+bi$, em que a e b são números reais, determine $a+b$.

28. (AIME) Para quantos inteiros positivos n menores ou iguais a 1000

$$(\sin t+i\cdot\cos t)^n=\sin nt+i\cdot\cos nt$$

para todo real t?

29. (AIME) Uma função f é definida no conjunto dos números complexos por $f(z)=(a+bi)\,z$ em que a e b são números positivos. Esta função tem a propriedade de que a imagem de cada ponto no plano complexo é equidistante do ponto e da origem. Dado que $|a+bi|=8$ e $b^2=\dfrac{m}{n}$, em que m e n são inteiros positivos primos entre si. Determine $m+n$.

30. (Croácia) Determine todos os inteiros a, b e c que satisfazem a igualdade $(a+bi)^3-107i=c$, onde $i=\sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

31. (Croácia) Calcule $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\cdot\sin\dfrac{6\pi}{7}\right)^{14}$.

Sugestões / Soluções

1. Use que $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$.

2. Faça $a=|z+\dfrac{1}{z}|$, desenvolva $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3$ e use a desigualdade triangular.

3. Use que $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

4. Use progressões geométricas.

7. Perceba que

$$8\,(3z+1)\,6\,(4z+1)\,4\,(6z+1)\,2\,(12z+1)=768,$$
$$\Leftrightarrow (24z+8)\,(24z+6)\,(24z+4)\,(24z+2)=768.$$

Faça $u = 24z + 5$ e $w = u^2$ assim,

$$(u+3)(u+1)(u-1)(u-3) = 768,$$

$$\left(u^2-1\right)\left(u^2-9\right) = 768,$$

$$w^2 - 10w - 759 = 0,$$

$$(w-33)(w+23) = 0.$$

Portanto, $z = \dfrac{\pm\sqrt{33}-5}{24}$ e $z = \dfrac{\pm\sqrt{23}i-5}{24}$.

8. Multiplicando a segunda equação por i e adicionando à primeira equação, temos:

$$x + yi = \frac{(3x-y)-(x+3y)\,i}{x^2+y^2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$x + yi + \frac{3\,(x-yi)}{x^2+y^2} - \frac{i\,(x-yi)}{x^2+y^2} = 3.$$

Seja $z = x + yi$. Então,

$$\frac{1}{z} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

A última equação é equivalente a

$$z + \frac{3-i}{z} = 3 \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{-3+4i}}{2} = \frac{3 \pm (1+2i)}{2},$$

assim, $(x,y) = (2,1)$ ou $(x,y) = (1,-1)$

9. Use o fato que $|\dfrac{z-a}{1-a\overline{z}}|^2 = \left(\dfrac{z-a}{1-a\overline{z}}\right)\left(\overline{\dfrac{z-a}{1-a\overline{z}}}\right)$.

10. Usando a lei de formação da função conseguimos a seguinte relação $z_i^2 - z_{i-1}^2 = z_{i+1} - z_i$.

11. Use que $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

13. Faça $z^9 = \dfrac{11-10iz}{11z+10i}$ e $z = a + bi$.

14. Use que $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

16. Seja $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$, e $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Temos que $z^{2002} = \overline{z}$. Note que $|z|^{2002} = |z^{2002}| = |\overline{z}| = |z|$, segue que $|z|\left(|z|^{2001}-1\right) = 0$. Então $|z| = 0$ ou $|z| = 1$. Se $|z| = 0$ teremos apenas uma solução $z = 0$. No caso em que $|z| = 1$, nós temos $z^{2002} = \overline{z}$, que é equivalente a $z^{2003} = \overline{z} \cdot z = |z|^2 = 1$. A equação $z^{2003} = 1$ tem 2003 soluções distintas.

Nos problema 18 e 20 use que se $z = \cos\theta + i\cdot\sin\theta$ e $\overline{z} = \cos\theta - i\cdot\sin\theta$. Então, $\cos\theta = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.

Nos problemas 19, 21 e 22 use que se $z = \cos\theta + i\cdot\sin\theta$ e $\overline{z} = \cos\theta - i\cdot\sin\theta$. Então, $\cos\theta = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $\sin\theta = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

22. Faça $z = a + bi$. Assim,

$$4 = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

Portanto,

$$|z - \frac{1}{z}| = |a + bi - \frac{1}{a+bi}| = |a + bi - \frac{a-bi}{a^2+b^2}|^2$$
$$|a + bi - \frac{a-bi}{4}|^2 = |\frac{3}{4}a + \frac{5}{4}bi|^2$$
$$\frac{9}{16}a^2 + \frac{25}{16}b^2 = \frac{9}{16}\left(4 - b^2\right) + \frac{25}{16}b^2 = \frac{9}{4} + b^2.$$

Assim, o menor valor de $|z - \frac{1}{z}|^2$ é $\frac{9}{4}$ que é obtido quando $b = 0$. Então, o menor valor de $|z - \frac{1}{z}|$ é $\frac{3}{2}$. Observe que $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$. Por outro lado, se $a^2 + b^2 = 4$, o máximo de b^2 é 4. Então, o máximo valor de $|z - \frac{1}{z}|^2$ é $\frac{9}{4} + 4$ e é obtido quando $b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2$. Então, o maior valor de $|z - \frac{1}{z}|$ é $\frac{5}{2}$ para $b = \pm 2$. Observe que nesse caso $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

24. Faça $C = \left(\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ e $D = \left(\dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}\right)$. É fácil ver que $C + D = 3$ e $CD = 3$, então $C^8 + D^8 = \left(C^4 + D^4\right)^2 - 2\left(CD\right)^4$. Faça o mesmo com $C^4 + D^4$.

25. Calcule $\dfrac{1}{1+\omega^k} + \dfrac{1}{1+\omega^{1997-k}}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 998$.

26. a) A interpretação geométrica da distância no plano complexo e a desigualdade triangular mostram que z é um ponto sobre o segmento $[a, b]$.
b) Usando os argumentos do item (a) temos:
★ $|z| + |z - 3| \geq |z - z + 3| = 3$, com igualdade acontecendo se, e somente se, z é um número real e $0 \leq z \leq 3$.
★ $|z - 1| + |z - 2| \geq |z - 1 - z + 2| = 1$, com igualdade acontecendo se, e somente se, z é real e $1 \leq z \leq 2$. Adicionando as desigualdades obtemos $|z| + |z-1| + |z-2| + |z-3| = 4$ se, e somente se, z é um número real e $1 \leq z \leq 2$.

27. $F(F(z)) = \dfrac{\dfrac{z+i}{z-i} + i}{\dfrac{z+i}{z-i} - i} = \dfrac{z + i + iz + i}{z + i - iz - i} = \dfrac{1+i}{1-i}\cdot\dfrac{z+1}{z-1} = i\cdot\dfrac{z+i}{z-i}$. Agora, é fácil ver que $F(F(F(z))) = z$, o que mostra que $z_n = z_{n-3}$, $\forall n \geq 3$. Em particular, $z_{2002} = z_{2002-667\cdot 3} =$

$z_1 = \dfrac{\dfrac{1}{137} + 2i}{\dfrac{1}{137}} = 1 + 274i$. Portanto, $a + b = 275$.

28. Note que

$$(\sin t + i \cdot \cos t)^n = \sin nt + i \cdot \cos nt = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]^n =$$

$$\cos n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + i \cdot n \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) =$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2} - nt\right) + i \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2} - nt\right).$$

e que

$$\sin nt + i \cdot \cos nt = \cos\left(\frac{\pi}{2} - nt\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - nt\right).$$

Tal condição é equivalente a $\cos\left(\frac{n\pi}{2} - nt\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - nt\right)$ e $\sin\left(\frac{n\pi}{2} - nt\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - nt\right)$, então $\frac{n\pi}{2} - nt - \frac{\pi}{2} + nt = 2\pi k$ o que implica que $n = 4k + 1$. Como $1 \leq n \leq 1000$ então $0 \leq k \leq 249$, ou seja, existem 250 valores de n que satisfazem a igualdade.

29. Como $(a + bi)\, z$ é equidistante de z e 0, então $|\,(a + bi)\, z - z| = |\,(a + bi)\, z|$. Assim, $|a - 1 + bi| = |a + bi|$, ou seja, $(a - 1)^2 + b^2 = a^2 + b^2$. Portanto, $a = \frac{1}{2}$. Sabemos que $|a + bi| = 8$, então $b = \frac{255}{4}$. Finalmente, $m + n = 259$.

30. $(a + bi)^3 - 107i = c \Leftrightarrow a^3 - 3ab^2 + \left(3a^2b - b^3 - 107\right) i = c$. Comparando as partes reais e imaginárias temos que $a^3 - 3ab^2 = c$ e $3a^2b - b^3 - 107 = 0$. A segunda equação é equivalente a $\left(3a^2b - b^2\right) b = 107$. Mas 107 é um número primo e a e b inteiros positivos, segue que:

$$3a^2b - b^2 = 107,\ b = 1$$

ou

$$3a^2b - b^2 = 1,\ b = 107.$$

No primeiro caso teremos $a = 6$ enquanto que no segundo caso não encontraremos um valor inteiro para a. Portanto, $c = 198$.

31. Temos que $1 + \cos\frac{\pi}{7} = 2\cos^2\frac{\pi}{14}$ e $\sin\frac{6\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}$. Então,

$$1 + \cos\frac{\pi}{7} + i \cdot \sin\frac{6\pi}{7} = 2\cos^2\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i \cdot \sin\frac{\pi}{14}\right).$$

Finalmente,

$$\left(1 + \cos\frac{\pi}{7} + i \cdot \sin\frac{6\pi}{7}\right)^{14} = \left(2\cos^2\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i \cdot \sin\frac{\pi}{14}\right)\right)^{14}$$

$$= 2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\cdot\sin\frac{\pi}{14}\right)^{14}$$
$$= 2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}(\cos\pi + i\cdot\sin\pi)$$
$$= -2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}$$

Bibliografia

1. Tópicos de Matemática Elementar, vol. 6.
Polinômios.
Antonio Caminha Muniz Neto
SBM

2. Complex Numbers from A to Z.
Titu Andreescu e Dorin Andrica
Birkhauser

3. 101 Problems in Algebra: From the training of the USA IMO team.
Titu Andreescu
AMT publishing

4. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Médio, 1981 - 2005
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos

5. The USSR Olympiad Problem Book
Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov e I.M. Yaglom

6. First Steps for Math Olympians
Using the American Mathematics Competitions
J. Douglas Faires

7. Problem - Solving Through Problems
Loren C. Larson
Springer

8. Olimpíada de Matemática de 1977 a 1997
Questões e Soluções - 2^o grau.

9. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 6
Complexos, Polinômios e Equações
Gelson Iezzi

10. Mathematical Olympiad Treasures
Titu Andreescu e Bogdan Enescu
Birkhauser

11. 360 Problems for Mathematical Contests
Titu Andreescu e Dorin Andrica
GIL

12. The Mandelbrot Problem Book
Sam Vandervelde

13. The First Five Years
Sam Vandervelde

14. Winning Solutions
Cecil Rousseau e Edward Lozansky

15. Curso de Álgebra, Vol. 1.
Abramo Hefez
IMPA

16. Plane Trigonometry and Complex Numbers
Dusan Jevtic

17. A problem book in algebra
V. A. Krechmar

18. Matemática em nível IME - ITA
Números Complexos e Polinômios
Caio dos Santos Guimarães

19. Precalculus
Richard Rusczyk
the Art of Problem Solving

20. A Matemática do ensino médio, vol. 4
Enunciados e soluções dos exercícios
Elon Lages Lima, Paulo Cézar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado

21. A Decade of Berkeley Math Circle
The American Experience, vol. 1
Zvezdelina Stankova e Tom Rike