Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 6

Miscelânea sobre raízes de polinômios I

Definição 1
Um polinômio na variável x é uma expressão que pode ser escrita na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e a_i $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, chamados *coeficientes*, são números em algum dos conjuntos $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$. O número n será chamado de *grau do polinômio*. Chamamos de *coeficiente líder* o coeficiente do termo de maior grau, nesse caso a_n, e chamamos de *termo independente* o coeficiente a_0. Um polinômio com todos os coeficientes iguais a zero é chamado de *polinômio nulo*. Um polinômio com coeficiente líder igual a 1 é chamado de *polinômio mônico*.

Definição 2
Seja c um número, o número $P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0$ é chamado de valor do polinômio aplicado ao número c. Se $P(c) = 0$, dizemos que c é um zero ou raiz do polinômio $P(x)$.

Definição 3
Dados dois polinômios $P(x)$ e $M(x) \neq 0$, dividir $P(x)$ por $M(x)$ é determinar dois outros polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:
(a) $P(x) = M(x) \cdot Q(x) + R(x)$.
(b) O grau de $R(x)$ é menor que o grau de $M(x)$ ou $R(x) = 0$, caso em que a divisão é exata.

Teorema 1. Seja $P(x)$ um polinômio tal que $x - a$ é um fator de $P(x)$, então $P(a) = 0$.
Demonstração. Se $x - a$ é um fator de $P(x)$, então $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$ para algum polinômio $Q(x)$. Fazendo $x = a$ temos que $P(a) = (a - a) \cdot Q(a) = 0 \cdot Q(a) = 0$, então a é uma raiz de $P(x)$.

Teorema 2. Seja $P(x)$ um polinômio tal que $P(a) = 0$, então $x - a$ é um fator de $P(x)$.
Demonstração. Se a é uma raiz de $P(x)$, então $P(a) = 0$. Pelo algoritmo da divisão,

temos que o resto quando $P(x)$ é dividido por $x - a$ é $P(a)$. Como $P(a) = 0$ então o resto é zero. Isto mostra que $x - a$ é um fator de $P(x)$.

Dispositivo de Briot - Ruffini
Dados os polinômios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ e $M(x) = x - a$. Nosso desejo é determinar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $P(x)$ por $M(x)$. Seja $Q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_0$, então:

$$(q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_0) \cdot (x - a) =$$

$$q_{n-1}x^n + q_{n-2}x^{n-1} + \ldots + q_0 x - aq_{n-1}x^{n-1} - aq_{n-2}x^{n-2} - \ldots - aq_1 x - aq_0 =$$

$$q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - aq_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (q_0 - aq_1)x - aq_0$$

Fazendo $P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R(x)$, temos:

$$q_{n-1} = a_n$$

$$q_{n-2} - aq_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-2} = aq_{n-1} + a_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$q_0 - aq_1 = a_1 \Rightarrow q_0 = aq_1 + a_1$$

$$R(x) - aq_0 = a_0 \Rightarrow R(x) = aq_0 + a_0$$

Exemplo
Vamos achar o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$ por $M(x) = x - 3$. Para isso usaremos o dispositivo de Briot - Ruffini:

3	2	0	-7	3	-1
	2	$2 \cdot 3 + 0$	$6 \cdot 3 - 7$	$11 \cdot 3 + 3$	$36 \cdot 3 - 1$

3	2	0	-7	3	-1
	2	6	11	36	107

Portanto, $Q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 11x + 36$ e $R(x) = 107$.

Teorema 3. (Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio $P(x)$ de grau $n \geq 1$ possui ao menos uma raiz complexa.
Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [1].

Teorema 4. Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n $(n \geq 1)$ e $a_n \neq 0$, então

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

em que $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ são as raízes de $P(x)$.
Para a demonstração desse teorema use os teoremas 2 e 3.

Teorema 5. Se o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

de grau n, possui $n+1$ raízes, então este polinômio é identicamente igual a 0, ou seja, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$.

Demonstração. Vamos demonstrar usando indução sobre n. Para $n = 1$, a prova é imediata. Vamos provar que se a afirmação é verdadeira para $n-1$, então também será verdadeira para n. Seja $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ são raízes de P então

$$P(x) = (x - x_n)Q(x),$$

com o polinômio $Q(x)$ tendo grau $n-1$ e n raízes distintas $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$. Pela indução, $Q(x)$ é identicamente nulo. Segue que $P(x)$ é também nulo.

Teorema 6. (Raízes Irracionais) Seja $t_i = b_i + c_i\sqrt{d}$ e $\overline{t_i} = b_i - c_i\sqrt{d}$, em que b_i, c_i e d são números racionais e $\sqrt{d}$ é irracional. Então,
(a) $\overline{t_1 + t_2} = \overline{t_1} + \overline{t_2}$.
(b) $\overline{t_1 \cdot t_2} = \overline{t_1} \cdot \overline{t_2}$.
(c) se $P(x)$ é um polinômio com coeficientes racionais tais que t_1 é uma raiz de $P(x)$, então $\overline{t_1}$ é também uma raiz.

Demonstração. (a) Temos que $t_1 + t_2 = (b_1 + c_1\sqrt{d}) + (b_2 + c_2\sqrt{d}) = (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2)\sqrt{d}$, então $\overline{t_1 + t_2} = (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)\sqrt{d}$. Por outro lado, $t_1 = b_1 - c_1\sqrt{d}$ e $t_2 = b_2 - c_2\sqrt{d}$, portanto $\overline{t_1 + t_2} = \overline{t_1} + \overline{t_2}$.

(b) Temos que

$$\overline{t_1 \cdot t_2} = \overline{(b_1 + c_1\sqrt{d})(b_2 + c_2\sqrt{d})} =$$
$$\overline{(b_1b_2 + c_1c_2d) + (b_1c_2 + b_2c_1)\sqrt{d}} =$$
$$(b_1b_2 + c_1c_2d) - (b_1c_2 + b_2c_1)\sqrt{d}.$$

Além disso, $\overline{t_1} \cdot \overline{t_2} = (b_1 - c_1\sqrt{d})(b_2 - c_2\sqrt{d}) = (b_1b_2 + c_1c_2d) - (b_1c_2 + b_2c_1)\sqrt{d}$. Portanto, $\overline{t_1 \cdot t_2} = \overline{t_1} \cdot \overline{t_2}$.

(c) Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Aplicando (a) e (b), temos que:

$$\begin{aligned} P(\overline{t_1}) &= a_n(\overline{t_1})^n + a_{n-1}(\overline{t_1})^{n-1} + \ldots + a_1(\overline{t_1}) + a_0 \\ &= a_n\overline{(t_1)^n} + a_{n-1}\overline{(t_1)^{n-1}} + \ldots + a_1(\overline{t_1}) + a_0 \\ &= \overline{a_n t_1^n + a_{n-1}t_1^{n-1} + \ldots + a_1 t_1 + a_0} \\ &= \overline{P(t_1)} = \overline{0} = 0, \end{aligned}$$

pois t_1 é uma raiz de $P(x)$.

Teorema 7. (Raízes Racionais) Se $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é um polinômio com coeficientes inteiros, tal que $\dfrac{p}{q}$ é uma raiz, com p e q inteiros, $q \neq 0$ e $mdc(p, q) = 1$, então $p|a_0$ e $q|a_n$.

Demonstração. Se $\dfrac{p}{q}$ é uma raiz de $P(x)$, então

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_np^n = -q[a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}] \Rightarrow$$

$$p|a_0$$

pois $mdc(p, q) = 1$.

De maneira análoga, é fácil provar que $q|a_n$.

Teorema 8. (Raízes Complexas) Se $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é um polinômio com coeficientes reais tal que $z = a + bi$ é uma raiz, com a e b reais, $b \neq 0$, então $\overline{z} = a - bi$ é também uma raiz.

Demonstração. Se z é uma raiz de $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, então $P(z) = 0$. Assim,

$$P(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_1(\overline{z}) + a_0 =$$

$$a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 =$$

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} =$$

$$\overline{a_nz^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1z} + \overline{a_0} =$$

$$\overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0} =$$

$$\overline{P(z)} = \overline{0} = 0.$$

Teorema 9. (Relações de Girard) Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ um polinômio e $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ suas raízes (reais ou complexas). Então:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
$$\vdots$$
$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Exercícios Resolvidos

1. (Torneio as Cidades) Prove que se $a,\ b$ e c são números inteiros e as somas $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ e $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ são também inteiros, então $|a|=|b|=|c|$.

   Solução. Seja
   $$p = \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
   e
   $$q = \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}.$$
   As raízes de $x^3-px^2+qx-1=0$ são $\frac{a}{b},\ \frac{b}{c}$ e $\frac{c}{a}$. Como os coeficientes são inteiros e as raízes racionais, os únicos pssíveis valores para as raízes são ± 1. Então $|a|=|b|=|c|$.

2. (OCM) Sejam $a,\ b,\ c$ e d as raízes (nos complexos) do polinômio x^4+6x^2+4x+2. Encontre um polinômio $p(x)$, do quarto grau, que tenha como raízes $a^2,\ b^2,\ c^2$ e d^2.

   Solução. Seja $Q(x) = x^4+6x^2+4x+2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Queremos encontrar
   $$P(x) = (x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)(x-d^2).$$
   Fazendo $x = y^2$,
   $$P(y^2) = (y^2-a^2)(y^2-b^2)(y^2-c^2)(y^2-d^2)$$
   $$= (y+a)(y-a)(y+b)(y-b)(y+c)(y-c)(y+d)(y-d)$$
   $$[(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)][(y+a)(y+b)(y+c)(y+d)]$$
   $$Q(y)Q(-y).$$
   Assim,
   $$P(y^2) = (y^4+6y^2+4y+2)(y^4+6y^2-4y+2)$$
   $$= (y^4+6y^2+2)^2-(4y^2)^2$$
   $$y^8+12y^6+40y^4+8y^2+4.$$
   Voltando para a variável x pela substituição $y^2 = x$, temos:
   $$P(x) = x^4+12x^3+40x^2+8x+4.$$

3. (Torneio das Cidades) Sabendo que a equação

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$$

possui uma raiz real, prove que

$$a^2 + b^2 \geq 8.$$

Solução. Temos que

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = (x^2 + px + q)(x^2 + sx + t) \quad (1)$$

em que p, q, s, t são reais. Como, pelo menos uma das raízes são reais, iremos assumir que ela é raiz de $x^2 + sx + t$, então:

$$s^2 \geq 4t.$$

Igualando os coeficientes em (1), temos:

$$a = p + s;$$

$$2 = q + t + ps;$$

$$b = pt + qs;$$

$$1 = qt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= p^2 + q^2 + 2ps + p^2t^2 + q^2s^2 + 2ptqs \\ &= p^2(1 + t^2) + s^2(1 + q^2) + 4ps \\ &\geq p^2(1 + t^2) + 4(t + q + ps) \\ &\geq 8. \end{aligned}$$

4. (Bulgária) Os comprimentos das alturas do ΔABC são soluções da equação cúbica

$$x^3 + kx^2 + lx + m = 0.$$

Determine o raio do círculo inscrito no ΔABC.

(a) $\dfrac{k}{m}$ (b) $-\dfrac{l}{k}$ (c) $-\dfrac{l}{m}$ (d) $\dfrac{m}{k}$ (e) $-\dfrac{m}{l}$

Solução. (C) Temos que

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Usando as Relações de Girard, temos:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{h_bh_c + h_ah_c + h_ah_b}{h_ah_bh_c} = \frac{l}{-m} = -\frac{l}{m}.$$

5. (Bulgária) Determine o número de raízes reais da equação

$$x^{1994} - x^2 + 1 = 0.$$

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 1994

Solução. (A) Se $|x| < 1$ então $1 - x^2 > 0$ e $x^{1994} \geq 0$ o que implica

$$x^{1994} - x^2 + 1 > 0.$$

Se $|x| \geq 1$ então $x^{1994} - x^2 = x^2(x^{1992} - 1)$ e, com isso,

$$x^{1994} - x^2 + 1 > 0,$$

portanto a equação não possui raízes reais.

6. (IMTS) Seja $f(x) = x^4 + 17x^3 + 80x^2 + 203x + 125$. Determine o polinômio, $g(x)$, de menor grau possível, tal que $f(3 \pm \sqrt{3}) = g(3 \pm \sqrt{3})$ e $f(5 \pm \sqrt{5}) = g(5 \pm \sqrt{5})$.

Solução. Seja $g(x)$ o polinômio que desejamos encontrar e $h(x)$ um polinômio tal que $h(x) = f(x) - g(x)$. Com isso $h(3 \pm \sqrt{3}) = 0$ e $h(5 \pm \sqrt{5}) = 0$. Portanto,

$$f(x) - g(x) = h(x) = a(x)(x - 3 - \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{3})(x - 5 - \sqrt{5})(x - 5 + \sqrt{5}) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - g(x) = h(x) = a(x)(x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 180x + 120) \Leftrightarrow$$

$$g(x) = f(x) - a(x)(x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 180x + 120) \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x^4 + 17x^3 + 80x^2 + 203x + 125 - a(x)(x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 180x + 120).$$

Finalmente, $g(x)$ terá grau menor que 4 se, e somente se, $a(x) \equiv 1$. Nesse caso $g(x) = 33x^3 - 6x^2 + 383x + 5$.

7. (Austrália) Seja $P(x)$ um polinômio cúbico com raízes r_1, r_2 e r_3. Suponha que

$$\frac{P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(-\frac{1}{2}\right)}{P(0)} = 1000.$$

Determine o valor de $\dfrac{1}{r_1r_2} + \dfrac{1}{r_2r_3} + \dfrac{1}{r_1r_3}$.

Solução. Seja $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Pela relações de Girard, temos que $r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}$ e $r_1r_2r_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}$. Assim,

$$\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_1r_3} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2r_3} = \frac{a_2}{a_0}.$$

Mas,

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a_3}{8} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_1}{2} + a_0,$$

e

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a_3}{8} + \frac{a_2}{4} - \frac{a_1}{2} + a_0.$$

Portanto, $1000 = \dfrac{P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(-\frac{1}{2}\right)}{P(0)} = \dfrac{\frac{a_2}{2} + 2a_0}{a_0} = \dfrac{a_2}{2a_0} + 2.$

Finalmente,

$$\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_1r_3} = \frac{a_2}{a_0} = 2(1000 - 2) = 1996.$$

8. (Austrália) Determine todos os polinômios f com coeficientes reais tais que

$$(x - 27)f(3x) = 27(x - 1)f(x)$$

para todo número real x.

Solução. Considere a equação

$$(x - 27)f(3x) = 27(x - 1)f(x) \quad (1)$$

Se $x = 27$ temos que $0 = 0 \cdot f(81) = 27 \cdot 26 \cdot f(27)$, então $f(27) = 0$. De maneira análoga, se $x = 1$ temos que $0 = 27 \cdot 0 \cdot f(1) = -26 \cdot f(3)$ então $f(3) = 0$.

Com isso, $f(x) = (x - 3)(x - 27)q(x)$. Substituindo esse resultado encontrado na equação inicial temos que

$$(x - 27)(3x - 3)(3x - 27)q(3x) = 27(x - 1)(x - 3)(x - 27)q(x).$$

Para $x \neq 1,\ 27$ temos que

$$(x - 9)q(3x) = 3(x - 3)q(x). \quad (2)$$

Agora, se $x = 3$ temos que $0 = 3 \cdot 0 \cdot q(3) = -6q(9)$, ou seja, $q(9) = 0$, assim $q(x) = (x - 9)g(x)$ que substituiremos na equação (2) obtendo

$$(x - 9)(3x - 9)g(3x) = 3(x - 3)(x - 9)g(x),$$

que para $x \neq 1,\ 3,\ 9,\ 27$ resulta $g(3x) = g(x)$.

Em particular, se $x = 2$ então $g(2) = g(6) = g(18) = \ldots = g(2 \cdot 3^k),\ \forall k$. Assim, $g(x) = g(2)$ possui infinitas raízes, o que é impossível, ou $g(x)$ é uma constante, digamos $g(x) = a$.
Finalmente, $q(x) = a(x-9)$ e $f(x) = a(x-3)(x-9)(x-27),\ a \in \mathbb{R}$.

9. (Austrália) Prove que o polinômio $4x^8 - 2x^7 + x^6 - 3x^4 + x^2 - x + 1$ não possui raízes reais.

   Solução. Temos que

$$P(x) = 4x^8 - 2x^7 + x^6 - 3x^4 + x^2 - x + 1 \Leftrightarrow$$

$$P(x) = 3 \cdot \left(x^4 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left[x^3\left(x-1\right)\right]^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

   Portanto, $P(x)$ é uma soma de quadrados. Para que $P(x) = 0$ todos os quadrados precisam ser iguais a zero, assim teremos que as duas igualdades $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ e $x = \frac{1}{2}$ devem acontecer simultaneamente, absurdo. Finalmente, $P(x)$ não possui raízes reais.

10. (AIME) Sejam a, b, c e d números reais tais que a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ possui quatro raízes não reais. O produto de duas dessas quatro raízes é $13 + i$ e a soma das outras duas é $3 + 4i$ em que $i = \sqrt{-1}$. Determine b.

    Solução. Sejam r_1, r_2, r_3 e r_4 as raízes. Se $r_1r_2 = 13 + i$ e $r_3 + r_4 = 3 + 4i$. Como o polinômio possui coeficientes reais e nenhuma das raízes são reais, então $r_3 = \overline{r_1}$ e $r_4 = \overline{r_2}$. Segue que $r_3r_4 = \overline{r_1r_2} = 13 + i$ e $r_1 + r_2 = \overline{r_3 + r_4} = 3 - 4i$. Com isso, o polinômio será

$$[x^2 - (3-4i)x + (13+i)][x^2 - (3+4i)x + (13+i)]$$
$$= x^4 - 6x^3 + 51x^2 - 70x + 170.$$

    Em particular, $b = 51 = (13 + i) + (3 - 4i)(3 + 4i) + (13 - i)$.

Exercícios propostos

1. (Espanha) Sejam $a,\ b,\ c$ números reais. Prove que se $x^3 + ax^2 + bx + c$ possui três raízes reais, então $3b \leq a^2$.

2. (Espanha) Dado o polinômio $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, prove que se o quadrado de uma de suas raízes é igual ao produto das outras duas, então $B^3D = C^3$.

3. Seja $f(x)$ um polinômio de grau n, $n > 1$, com coeficientes inteiros e n raízes reais, nem todas iguais, no intervalo $(0, 1)$. Prove que se a é o coeficiente líder de $f(x)$, então

$$|a| \geq 2^n + 1.$$

4. (Czech and Slovak) Seja a e b números reais. Prove que se a equação

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

possui duas raízes reais distintas tais que a soma é igual ao produto, então a equação não possui outras raízes reais e, além disso, $a + b > 0$.

5. (Canadá) O polinômio

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

com coeficientes inteiros $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, é tal que existem quatro inteiros distintos $a,\ b,\ c, d$ tais que

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5,$$

mostre que não existe um inteiro k tal que $P(k) = 8$.

6. Sejam a e b duas raízes do polinômio $x^4 + x^3 - 1$. Prove que ab é uma raiz do polinômio $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

7. (Romênia) Sejam $a,\ b,\ c,\ a \neq 0$, tais que a e $4a + 3b + 2c$ têm o mesmo sinal. Mostre que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não pode ter duas raízes no intervalo $(1, 2)$.

8. (OBM) $a,\ b,\ c,\ d$ são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$, e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.

9. (TST Romênia) Sejam a, n números inteiros, e p um número primo tal que $p > |a| + 1$. Prove que o polinômio $f(x) = x^n + ax + p$ não pode ser representado como o produto de dois polinômios com coeficientes inteiros.

10. (Ibero) Ache as raízes $r_1,\ r_2,\ r_3$ e r_4 da equação $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabendo que as raízes são reais positivas, $a,\ b,\ c$ são reais e que
$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

11. (Espanha) Sejam $x_1,\ x_2$ as raízes do polinômio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, sendo m um número real. Prove que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

12. (Espanha) Prove que não existem inteiros a, b, c e d tais que o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ satisfaz $P(4) = 1$ e $P(7) = 2$.

13. (OBM) Seja $f(x) = x^2 + 2007x + 1$. Prove que, para todo n inteiro positivo, a equação $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\ vezes}(x))\ldots))$ tem pelo menos uma solução real.

14. (TST Brasil) Sejam $a,\ b,\ c,\ d$ números reais distintos tais que
$$a = \sqrt{4 + \sqrt{5 + a}},$$
$$b = \sqrt{4 - \sqrt{5 + b}},$$
$$c = \sqrt{4 + \sqrt{5 - c}},$$
$$d = \sqrt{4 - \sqrt{5 - d}}.$$
Determine $abcd$.

15. Sejam a, b e c lados, com medidas inteiras, de um triângulo.
(a) Prove que se a equação
$$x^2 + (a + 1)x + b - c = 0$$
possui raízes inteiras, então o triângulo é isósceles.

(b) Prove que se a equação
$$x^2 + (2ab + 1)x + a^2 + b^2 - c^2 = 0$$
possui raízes inteiras, então o triângulo é retângulo.

(c) Prove que se a equação

$$x^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 1)x + ab + bc + ac = 0$$

possui raízes inteiras, então o triângulo é equilátero.

16. (AIME) Sejam a, b e c as raízes de $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ e $a + b$, $b + c$ e $c + a$ as raízes de $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$. Determine t.

17. (AIME) Considere os polinômios $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ e $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Dado que z_1, z_2, z_3 e z_4 são as raízes de $Q(x) = 0$, ache $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$.

18. (IMO Short List) Sejam a, b, c, d, e e f números inteiros positivos. Se $S = a + b + c + d + e + f$ divide $abc + def$ e $ab + bc + ca - de - ef - fd$. Prove que S é composto.

19. (Iugoslávia) Ache todos os racionais positivos $a \leq b \leq c$ tais que os números

$$a + b + c,\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},\ abc$$

sejam todos inteiros.

20. (Austrália) Os polinômios $x^2 + x$ e $x^2 + 2$ são escritos em um quadro. Beatriz deve escrever no mesmo quadro a soma, a diferença ou o produto de quaisquer dois polinômios que estiverem escritos no quadro. Se Beatriz repetir o processo quantas vezes quiser, em algum momento ela conseguirá chegar ao polinômio x?

21. (Czech and Slovak) Determine todos os números reais s tais que

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

possui quatro raízes reais e distintas tais que o produto de duas dessas raízes seja -2.

22. (Romênia) Sejam a, b, c e d números reais tais que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $f(2) + f(5) < 7 < f(3) + f(4)$. Prove que existem $u,\ v \in \mathbb{R}$ tais que $u + v = 7$ e $f(u) + f(v) = 7$.

23. (Romênia) Seja $P(x) = a_{1998}x^{1998} + a_{1997}x^{1997} + \ldots + a_1x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais tal que $P(0) \neq P(-1)$, e sejam a, b números reais. Seja $Q(x) = b_{1998}x^{1998} + b_{1997}x^{1997} + \ldots + b_1x + b_0$ um polinômio com coeficientes reais tal que $b_k = aa_k + b$, $\forall k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 1998$. Prove que se $Q(0) = Q(-1) \neq 0$, então o polinômio Q não possui raízes reais.

24. Determine todos os polinômios satisfazendo a equação polinomial $(x+1)P(x) = (x-10)P(x+1)$.

25. Determine todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais para os quais existe um inteiro positivo n tal que para todo x,

$$P\left(x + \frac{1}{n}\right) + P\left(x - \frac{1}{n}\right) = 2P(x).$$

Soluções

1. Sem perda de generalidade sejam $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ as raízes, então:

$$x^3+ax^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3+(-\alpha-\beta-\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma.$$

Temos que $a = -\alpha - \beta - \gamma$ e $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$. Portanto,

$$a^2 - 3b = (-\alpha-\beta-\gamma)^2 - 3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$$

$$= \frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2) + (\beta-\gamma)^2 \geq 0.$$

2. Sejam $r,\ s,\ t$ as raízes, então 0 polinômio pode ser escrito da seguinte forma

$$p(x) = (x-r)(x-s)(x-t) = x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+st+tr)x - rst.$$

Igualando os coeficientes, temos:

$$\begin{cases} r + s + t = -B \\ rs + st + tr = C \\ rst = -D \end{cases}$$

Como $r^2 = st$, temos que

$$\begin{cases} C = rs + r^2 + tr = r(r+s+t) = -rB \\ -D = rst = r^3 \end{cases}$$

Finalmente,

$$C^3 = (-rB)^3 = -r^3B^3 = B^3D.$$

3. Seja $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$, em que $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ são as raízes reais, nem todas iguais, pertencentes ao intervalo $(0, 1)$. Como os coeficientes são inteiros então $f(0)$ e $f(1)$ são números inteiros. Assim,

$$f(0) = a(0 - x_1)(0 - x_2)\dots(0 - x_n) = a(-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$$

e

$$f(1) = a(1 - x_1)(1 - x_2)\dots(1 - x_n).$$

Por outro lado, $|f(0) \cdot f(1)| = |a^2(-1)^n x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)\dots x_n(1 - x_n)| = a^2 x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)\dots x_n(1 - x_n) \geq 1$, pois $f(0)$ e $f(1)$ são números inteiros. Mas, se $0 < x < 1$, então $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$, com igualdade acontecendo se, e somente se, $x = \frac{1}{4}$ (MA $\geq$ MG).

Como as raízes não são todas iguais, não teremos igualdade acontecendo em $x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)\dots x_n(1 - x_n) \leq a^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$, portanto:

$$1 \leq a^2 x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)\dots x_n(1 - x_n) < a^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$2^{2n} < a^2 \Leftrightarrow |a| \geq 2^n + 1,$$

pois a é um número inteiro.

4. Sejam x_1 e x_2 raízes reais e distintas de $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$ tais que $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = p$, então:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - px + p)(x^2 + rx + s), \quad (1)$$

em que r e s são números reais. A igualdade (1) garante que:

$$-4 = -p + r, \ (2)$$

$$4 = p + s - pr, \ (3)$$

$$a = -ps + pr, \ (4)$$

$$b = ps. \ (5)$$

Da equação (2) temos que $r = p - 4,\ (6)$. Substituindo (6) em (3) temos

$$s = 4 - p + p(p - 4) = (p - 4)(p - 1). \ (7)$$

Mas a equação quadrática $x^2 - px + p = 0$ possui raízes reais e distintas x_1 e x_2, com isso seu discriminante é positivo, ou seja

$$p^2 - 4p > 0. \ (8)$$

Adicionando as equações (4) e (5) e substituindo r em (6), temos

$$a + b = pr = p(p - 4) = p^2 - 4p > 0.$$

Seja D o discriminante da equação

$$x^2 + rx + s = 0.$$

Das equações (6), (7) e (8) temos

$$D = r^2 - 4s = (p - 4)^2 - 4(p - 4)(p - 1) = -3p(p - 4) = -3(p^2 - 4p) < 0.$$

Portanto, a equação possui apenas duas raízes reais.

5. Seja $M(x) = P(x) - 5$ temos que:

$$M(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)Q(x)$$

e o polinômio $Q(x)$ com coeficientes inteiros. Vamos admitir a existência de um inteiro k tal que $P(k) = 8 \Rightarrow M(k) = 3$. Dessa forma,

$$3 = (k - a)(k - b)(k - c)(k - d)Q(k).$$

Mas essa última igualdade não pode existir pois 3 não pode ser escrito como o produto de pelo menos 4 inteiros distintos. Portanto, não existe tal k.

6. Sejam c e d as outras duas raízes de $x^4 + x^3 - 1$. Pelas relações de Girard, temos:

$$a + b + c + d = -1,$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0,$$

$$abc + abd + acd + bcd = 0,$$

$$abcd = -1.$$

Fazendo $m = a + b$, $n = c + d$, $r = ab$ e $s = cd$, então

$$m + n = -1, \ (1)$$

$$r + s + mn = 0, \ (2)$$

$$rn + sm = 0, \ (3)$$
$$rs = -1. \ (4)$$

Fazendo $s = -\dfrac{1}{r}$ e $n = -1 - m$ em (2) e (3), respectivamente, temos

$$r - \frac{1}{r} - m^2 - m = 0, \ (5)$$

e

$$r(-1 - m) - \frac{m}{r} = 0. \ (6)$$

De (6) encontramos $m = -\dfrac{r^2}{r^2 + 1}$. Substituindo em (5), temos

$$r - \frac{1}{r} - \frac{r^4}{(r^2 + 1)^2} + \frac{r^2}{r^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^6 + r^4 + r^3 - r^2 - 1 = 0,$$

ou seja, $r = ab$ é uma raiz de $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

7. Temos que

$$0 \leq \frac{4a + 3b + c}{a} = 4 + 3\frac{b}{a} + 2\frac{c}{a} = 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 4 = (x_1 - 1)(x_2 - 2) + (x_1 - 2)(x_2 - 1).$$

Se x_1 e x_2 pertencerem ao intervalo $(1, 2)$, então cada termo da soma acima será estritamente negativo, o que é uma contradição.

8. É fácil perceber que $a + b = 3c$ e que $c + d = 3a$. Somando e subtraindo membro a membro as duas igualdades obteremos $b + d = 2\,(a + c)$ e $b - d = 4\,(c - a)$. Como a é raiz de $x^2 - 3cx - 8d = 0$, segue que

$$a^2 - 3ac - 8d = 0 \ (1).$$

Do mesmo modo, como c é raiz de $x^2 - 3ax - 8b = 0$, temos que

$$c^2 - 3ac - 8d = 0 \ (2).$$

Subtraindo as igualdades (1) e (2) e utilizando as relações anteriormente obtidas, vem:
$a^2 - c^2 = 8(d - b) \Rightarrow (a - c)(a + c) = 8 \times 4(a - c)$. Como $a - c \neq 0$, concluímos que $a + c = 32$.
Portanto, $a + c = 32$ e $b + d = 2(a + c) = 64$, donde $a + b + c + d = 96$.

9. Seja z uma raiz complexa do polinômio. Vamos provar que $|z| > 1$. Suponha que $|z| \leq 1$, então $z^n + az = -p$, então:

$$p = |z^n + az| = |z||z^{n-1} + a| \leq |z^{n-1}| + |a| \leq 1 + |a|,$$

contrariando o fato que $p > |a| + 1$. Agora, seja $f(x) = g(x)h(x)$ uma decomposição de $f(x)$ em polinômios com coeficientes inteiros então $p = g(0)h(0)$, então $|g(0)| = 1$ ou $|h(0)| = 1$. Suponha que $|g(0)| = 1$. Se $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_k$ são raízes de $g(x)$ então são também raízes de $f(x)$, assim:

$$1 = |g(0)| = |z_1 z_2 \ldots z_k| = |z_1||z_2|\ldots|z_k| >,$$

que é uma contradição.

10. Sejam $r_1,\ r_2,\ r_3$ e r_4 as raízes da equação, então:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{5}{4}.$$

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos que:

$$\frac{\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{r_1}{2} \cdot \frac{r_2}{4} \cdot \frac{r_3}{5} \cdot \frac{r_4}{8}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4},$$

ou seja, aconteceu a igualdade entre as médias, portanto:

$$\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = 1,\ r_3 = \frac{5}{4},\ r_4 = 2.$$

11. Temos que $x_1 + x_2 = -m$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m^2 - 1}{3}$ e

$$\begin{aligned} P(x_1^3) - P(x_2^3) &= 3x_1^6 + 3mx_1^3 + m^2 - 1 - (3x_2^6 + 3mx_2^3 + m^2 - 1) \\ &= 3(x_1^6 - x_2^6) + 3m(x_1^3 - x_2^3) \\ &= 3(x_1^3 + x_2^3)(x_1^3 - x_2^3) + 3m(x_1^3 - x_2^3) \\ & 3(x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3 + m). \end{aligned}$$

Mas $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-m)^3 - 3\dfrac{m^2 - 1}{3}(-m) = -m$. Então, $x_1^3 + x_2^3 + m = 0 \Rightarrow P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

12. Vamos admitir a existência do polinômio. Pelo teorema do resto $P(x) = (x-4)Q(x)+1$, sendo $Q(x)$ um polinômio de grau 2 com coeficientes inteiros. Então $P(7) = 2 = (7-4)Q(7)+1 \Rightarrow Q(7) = \dfrac{1}{3}$, que não é inteiro, contrariando o fato que $Q(x)$ possui coeficientes inteiros.

13. Sejam $f^1(x) = f(x)$ e para cada $n \geq 1$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. Sejam $\Delta_1 = 2007^2 - 4$, $x_1 = \dfrac{-2007+\sqrt{\Delta_1}}{2}$. Temos $f(x_1 = 0$. Vamos mostrar por indução que existe uma sequência de reais positivos (Δ_n) tal que, definindo $x_n = \dfrac{-2007+\sqrt{\Delta_n}}{2}$, temos $f(x_{n+1}) = x_n$, para todo n, donde $f^{n+1}(x_{n+1}) = f^n(x_n) = 0$. Para isso, note que a maior raiz de $x^2+2007x+1 = x_n$ é $\dfrac{-2007+\sqrt{\Delta_{n+1}}}{2}$, onde $\Delta_{n+1} = 2007^2-4+4x_n = 2007^2 - 4018 + 2\sqrt{\Delta_n} > 0$.

14.
$$a = \sqrt{4+\sqrt{5+a}} \Rightarrow$$
$$a^2 = 4+\sqrt{5+a} \Rightarrow$$
$$a^2 - 4 = \sqrt{5+a} \Rightarrow$$
$$a^4 - 8a^2 - a + 11 = 0.$$

    Analogamente,
$$b^4 - 8b^2 - b + 11 = 0,$$
$$c^4 - 8c^2 + c + 11 = 0,$$
$$d^4 - 8d^2 + d + 11 = 0.$$

    Seja $f(x) = x^4 - 8x^2 - x + 11$ e $g(x) = x^4 - 8x^2 + x + 11$. Então a e b são raízes de $f(x) = 0$, e c e d são raízes de $g(x) = 0$. Mas $f(-x) = x^4 - 8x^2 + x + 11 = g(x)$. Então, as raízes de $f(x) = 0$ são a, b, $-c$ e $-d$. Portanto, pelas relações de Girard temos que $ab(-c)(-d) = abcd = 11$.

15. (a) Se $b > c$ então $(a+1)^2 - 4(b-c)$ é um quadrado perfeito menor e de mesma paridade que $(a+1)^2$. Portanto,
$$(a+1)^2 - 4(b-c) \leq (a-1)^2$$
    assim $a+c \leq b$, contrariando a desigualdade triangular. O caso $b < c$ é análogo.

(b) Se $a^2 + b^2 > c^2$ então $(2ab + 1)^2 - 4(a^2 + b^2 - c^2)$ é o quadrado de um número ímpar menor que $2ab + 1$. Portanto,

$$(2ab + 1)^2 - 4(a^2 + b^2 - c^2) \leq (2ab - 1)^2,$$

assim $c^2 \leq (a - b)^2$, contradição. O caso $c^2 > a^2 + b^2$ é análogo.

(c) Se a equação tem raízes inteiras, então $(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - 4(ab + bc + ac)$ é um quadrado perfeito menor e de mesma paridade que $(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2$. Portanto,

$$(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - 4(ab + bc + ac) \leq (a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$a = b = c.$$

16. A primeira equação garante que $a + b + c = -3$. A segunda equação garante que $t = -(a + b)(b + c)(c + a)$. Segue que $t = -(3 - c)(3 - a)(3 - b)$, ou seja, $t = 27 + 9(a + b + c) + 3(ab + ac + bc) + abc$. A primeira equação garante que $ab + bc + ca = 4$ e $abc = 11$, então $t = 27 - 27 + 12 + 11 = 23$.

17. Usando o algoritmo da divisão temos que $P(x) = Q(x)(x^2+1)+x^2-x+1$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{4} P(z_i) = \sum_{i=1}^{4} z_i^2 - \sum_{i=1}^{4} z_i + 4 = \left(\sum_{i=1}^{4} z_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} z_i z_j - \sum_{i=1}^{4} z_i + 4.$$

Usando as relações de Girard, temos que $\sum_{i=1}^{4} P(z_i) = 1 + 2 - 1 + 4 = 6$.

18. Todos os coeficientes do polinômio

$$f(x) = (x + a)(x + b)(x + c) - (x - d)(x - e)(x - f)$$
$$= Sx^2 + (ab + bc + ca - de - ef - fd)x + (abc + def)$$

são múltiplos de S. Então, $f(d) = (a + d)(b + d)(c + d)$ é um múltiplo de S. Isto implica que S é composto pois $a + d$, $b + d$ e $c + d$ são menores que S.

19. Seja $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$ um polinômio cujas raízes são a, b e c. Mas $ab + bc + ca = abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \in \mathbb{Z}$, portanto $P(x)$ possui coeficientes inteiros. Pelo teorema das raízes racionais temos que a, b e c são inteiros. Sabemos que a, b e c são positivos então nosso problema é achar todos os valores de a, b e c tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ é natural. As soluções são: $(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 1);\ (1,\ 2,\ 2);\ (3,\ 3,\ 3);\ (2,\ 4,\ 4);\ (2,\ 3,\ 6)$.

20. Sejam $P(x) = x^2 + x$ e $Q(x) = x^2 + 2$. É fácil ver que $P(2) = Q(2) = 6$. Suponha que $A(x)$ e $B(x)$ são dois polinômios quaisquer tais que $A(2)$ e $B(2)$ são divisíveis por 6. Segue que $A(2) + B(2)$, $A(2) - B(2)$ e $A(2) \cdot B(2)$ são todos divisíveis por 6. Portanto, qualquer polinômio $R(x)$ gerado tem $R(2)$ divisível por 6. Como $T(x) =$ tem $T(2) = 2$ então $T(x) = x$ nunca aparecerá no quadro.

21. Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes tais que $x_1x_2 = -2$, (0). Pelas relações de Girard temos que:
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,\ (1)$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{s}{4},\ (2)$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2},\ (3)$$
$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{2}.\ (4)$$
Das equações (0) e (4) temos que
$$x_3x_4 = \frac{1}{4}.$$
Fatorando a equação (3) e, em seguida, substituindo os valores de x_1x_2 e x_3x_4 temos:
$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2) - 2(x_3 + x_4) = -\frac{11}{2}.$$
A última equação e (1) garantem que $x_1 + x_2 = 2$ e $x_3 + x_4 = 3$. Fatorando a equação (2) e substituindo os valores já encontrados temos que
$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = \frac{s}{4} \Leftrightarrow$$
$$s = 17.$$
As raízes do polinômio são $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ e $x_{3,4} = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{2}$.

22. Precisamos provar que $f(x) + f(7 - x) = 7$ possui solução. Seja $g(x) = f(x) + f(7 - x) - 7$. É fácil ver que g é um polinômio com grau no máximo 2. Temos que $g(2) < 0$ e $g(3) > 0$. Segue que $g(x) = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

23. É fácil ver que $Q(x) = aP(x) + b(x^{1998} + x^{1997} + \ldots + 1)$. De $Q(0) = Q(-1)$ temos que $a(P(0) - P(-1)) = 0$, então $a = 0$. Com isso, $Q(x) = b(x^{1998} + x^{1997} + \ldots + 1$, com $b \neq 0$ pois $Q(0) \neq 0$. É fácil ver que $Q(x)$ não possui raízes positivas. Para $x \leq 1$ temos

$$x^{1998} + x^{1997} + \ldots + 1 = x^{1997}(x+1) + x^{1995}(x+1) + \ldots + x(x+1) + 1 \geq 1,$$

e para $x \in (-1, 0)$,

$$x^{1998} + x^{1997} + \ldots + 1 = x^{1998} + x^{1996}(x+1) + \ldots + x^2(x+1) + x + 1 > 0.$$

Conclusão: $Q(x)$ não possui raízes reais.

24. Temos que $(x+1)P(x) = (x-10)P(x+1)$ mostra que $P(x)$ é divisível por $(x-10)$. Trocando $x+1$ por x na igualdade inicial temos que $xP(x-1) = (x-11)P(x)$, ou seja, $P(x)$ é divisível por x. Então $P(x) = x(x-10)P_1(x)$. Substituindo na equação original e cancelando os termos temos que

$$xP_1(x) = (x-9)P_1(x+1).$$

Repetindo o argumento encontramos $P_1(x) = (x-1)(x-9)P_2(x)$ e $P(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-10)Q(x)$, em que $Q(x) = Q(x+1)$. Segue que $Q(x)$ é constante, e a solução do problema é

$$P(x) = ax(x-1)(x-2)\ldots(x-10),$$

em que a é uma constante arbitrária.

25. Seja m o grau do polinômio $P(x)$, então

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0.$$

Usando binômio de Newton para $\left(x \pm \dfrac{1}{n}\right)^m$ e $\left(x \pm \dfrac{1}{n}\right)^{m-1}$ temos que

$$2a_m x^m + 2a_{m-1}x^{m-1} + 2a_{m-2}x^{m-2} + a_m\frac{m(m-1)}{n^2}x^{m-2} + Q(x)$$
$$= 2a_m x^m + 2a_{m-1}x^{m-1} + 2a_{m-2}x^{m-2} + R(x),$$

em que Q e R são polinômios de grau no máximo $m-3$. Comparando os coeficientes encontramos $a_m\dfrac{m(m-1)}{n^2} = 0$. Mas $a_m \neq 0$, pois é o coeficiente líder do polinômio, então $m(m-1) = 0$, ou seja, $m = 0$ ou $m = 1$. Uma simples verificação garante que todos os polinômios de grau 0 ou 1 satisfazem a condição inicial.

Bibliografia

1. Tópicos de Matemática Elementar, vol. 6
Polinômios
Antonio Caminha Muniz Neto
SBM

2. Intermediate Algebra
the Art of Problem Solving
Richard Rusczyk e Mathew Crawford

3. Equations and Inequalities
Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory
Jiri Herman, Radan Kucera e Jaromir Simsa

4. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 6
Complexos, Polinômios e Equações
Gelson Iezzi

5. Equations and Inequalities
MIR Publishers Moscow
V. V. Vavilov, I. I. Melnikov, S. N. Olekhnik e P. I. Pasichenko

6. The Ussr Olympiad Problem Book
Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov e I. M. Yaglom

7. Mathematical Olympiad Treasures
Titu Andreescu e Bogdan Enescu

8. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses
For Junior Section, vol. 1
Xu Jiagu

9. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses
For Junior Section, vol. 2
Xu Jiagu

10. Problem - Solving Through Problems
Loren C. Larson

11. Kvant Selecta: Algebra and Analysis, I
Serge Tabachnikov

12. Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II

Serge Tabachnikov

13. Bulgarian Mathematics Competition, 1999 - 2001
BJ Lazarov, JB Tabov, PJ Taylor e AM Storozhev
AMT

14. Australian Mathematical Olympiads, 1996 - 2011
H Lausch, A Di Pasquale, DC Hunt e PJ Taylor
AMT

15. Mathematical Competitions - Baltic Way - 1990 - 2005

16. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Médio, 1981 - 2005
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos

17. 101 Problems in Algebra: From the training of the USA IMO team.
Titu Andreescu
AMT publishing

18. Winning Solutions
Cecil Rousseau e Edward Lozansky

19. Mathematical Olympiad Treasures
Titu Andreescu e Bogdan Enescu
Birkhauser

20. Tournament of Towns - 1993 - 1997 (Book 4)
PJ Taylor e AM Storozhev
AMT

21. Olimpiada Matemática Española
15000 Problemas de diferentes Olimpiadas de Matemática en el Mundo

22. 360 Problems for Mathematical Contests
Titu Andreescu e Dorin Andrica
GIL

23. International Mathematical Talent Search
Part 1
G Berzsenyi
AMT

24. International Mathematical Talent Search
Part 1

G Berzsenyi
AMT

25. Putnam and Beyond
Razvan Gelca e Titu Andreescu
Springer

26. A problem book in algebra
V. A. Krechmar

27. Matemática em nível IME - ITA
Números Complexos e Polinômios
Caio dos Santos Guimarães

28. A Matemática do ensino médio, vol. 4
Enunciados e soluções dos exercícios
Elon Lages Lima, Paulo Cézar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado

29. Curso de Álgebra, Vol. 1.
Abramo Hefez
IMPA

30. Problem - Solving Strategies
Arthur Engel
Springer

31. Problems from the book
Titu Andreescu e Gabriel Dospinescu
XYZ Press