Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Miscelânea sobre raízes de polinômios II

Definição 1: Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio com $a_n \neq 0$ e $n > 0$. Definiremos $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$ como sendo o polinômio que é a derivada do polinômio $P(x)$. As derivadas dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ satisfazem
(1) $P(x) = k,\ k$ constante $\Rightarrow P'(x) = 0$.
(2) $(P + Q)'(x) = P'(x) + Q'(x)$.
(3) $(P - Q)'(x) = P'(x) - Q'(x)$.
(4) $(P \cdot Q)'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x)$.

Como consequência de (3) temos que se x_1, x_2, $\ldots$, x_n são raízes de, um polinômio de grau n, $P(x)$, então

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}.$$

Em seguida, um teorema bem interessante sobre raízes múltiplas de um polinômio.

Teorema 1. Se r é raiz de multiplicidade m do polinômio $P(x)$, então r é raiz de multiplicidade $m - 1$ do polinômio $P'(x)$.

Demonstração. Temos que $P(x) = (x - r)^m \cdot Q(x) \Rightarrow P'(x) = m(x - r)^{m-1}Q(x) + (x - r)^m Q'(x) = (x-r)^{m-1}[m\cdot Q(x)+(x-r)\cdot Q'(x)]$ e, como $m\cdot Q(r)+(r-r)\cdot Q'(r) = m\cdot Q(r) \neq 0$, ou seja, r é uma raiz de multiplicidade $m - 1$ de $P'(x)$.

1. Determine um polinômio $P(x)$, de grau 5, tal que $P(x) + 1$ é divisível por $(x - 1)^3$ e $P(x) - 1$ é divisível por $(x + 1)^3$.

   Solução. Se 1 é uma raiz de multiplicidade 3 de $P(x)$ então 1 é raiz de multiplicidade 2 do polinômio $P'(x)$. Da mesma forma -1 é uma raiz de multiplicidade 2 de $P'(x)$. Segue que $P'(x)$ é divisível pelo polinômio $(x-1)^2(x+1)^2$. Mas, $P'(x)$ é um polinômio de grau 4. Então,

$$P'(x) = c(x - 1)^2(x + 1)^2 = c(x^4 - 2x^2 + 1),$$

para alguma constante c. Agora, $P(x) = c \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right) + d$, para c e d reais. Como $P(-1) = 1$ e $P(1) = -1$, então $c = -\frac{15}{8}$ e $d = 0$ e $P(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x$.

Vamos ver uma outra solução.
Note que $(x-1)^3$ divide $P(x)+1$ e $P(-x)-1$, então $(x-1)^3$ divide $P(x)+P(-x)$. Além disso, $(x+1)^3$ divide $P(x)-1$ e $P(-x)+1$, então $(x-1)^3$ divide $P(x)+P(-x)$. Dessa forma, $(x-1)^3(x+1)^3$ divide $P(x)+P(-x)$, que é um polinômio de grau 5, assim $P(x)+P(-x) = 0$, $\forall x$. Portanto, os coeficientes dos termos de grau par de $P(x)$ são iguais a zero. Agora, $P(x)+1 = (x-1)^3(Ax^2+Bx-1)$. Com isso, $B-3A = 0$ e $3+3B-A = 0$, ou seja, $A = -\frac{3}{8}$ e $B = -\frac{9}{8}$. Finalmente, $P(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x$.

2. Sejam $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$, as raízes diferentes de 1 do polinômio $P(x) = x^n - 1$, $n \geq 2$. Prove que

$$\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2}.$$

Solução. Seja $R(x)$ um polinômio de grau $n-1$, cujas raízes são $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$. Segue que

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_{n-1}}.$$

Por outro lado, $R(x) = \frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$, então $R(1) = n$ e $R'(1) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Dessa forma,

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \ldots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{R'(1)}{R(1)} = \frac{n-1}{2}.$$

3. Prove que o polinômio $P(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ não possui raízes múltiplas.

Solução. O polinômio P possui uma raiz múltipla r se $P(r) = P'(r) = 0$. Mas $P(x) = P'(x) + \frac{x^n}{n!}$. Dessa forma, se r for uma raiz então $P(r) = P'(r) + \frac{r^n}{n!} \Leftrightarrow r = 0$. Por outro lado, $P(0) = 1$. Assim, P não possui raízes múltiplas.

4. Determine a para que -1 seja uma raiz múltipla de $P(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$.

Solução. Temos que $P(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$. Mas, $P'(-1) = 0 \Rightarrow 5 + 2a - a = 0 \Leftrightarrow a = -5$.

5. Prove que $(x-1)^2|nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$.

   Solução. Temos que $P(1)=n-(n+1)+1=0$ e $P'(1)=n(n+1)-(n+1)n=0$. Portanto, 1 é raiz com multiplicidade 2.

Exercícios propostos

1. Sejam x_1, x_2, ..., x_n as raízes do polinômio $x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$. Prove que
$$\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\ldots+\frac{1}{1-x_n}=\frac{n}{2}.$$

2. Demonstre que, se a equação $x^3-ax+b=0$ $(ab\neq 0)$, com $a,\ b$ reais, tiver uma raiz dupla, então a será sempre positivo.

3. (ITA) Seja $k\in\mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3+7x^2+4x+k=0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2, distinta de x_1. Então, $(k+x_1)x_2$ é igual a
   (a) -6. (b) -3. (c) 1. (d) 2. (e) 8.

4. Prove que $(x+1)^2|x^{4n+2}+2x^{2n+1}+1$.

5. Determine todos os polinômios $P(x)$, com coeficientes inteiros, que satisfazem $P(P'(x))=P'(P(x)),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

6. Se a equação $x^3+ax^2+3x+1=0$ tem raiz tripla, qual o valor de a?

7. Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ polinômios com coeficientes complexos, de grau maior ou igual a 1, tais que $P(z)=0$ se, e somente se, $Q(z)=0$ e $P(z)=1$ se, e somente se, $Q(z)=1$. Prove que os polinômios são iguais.

Soluções/Sugestões

1. Vamos fazer uma solução com uma idéia diferente das que foram trabalhadas nessa aula. Observe o polinômio com raízes
$$y_k=\frac{1}{1-x_k},\ k=1,2,\ldots,n.$$

Da igualdade acima temos que
$$x_k=\frac{y_k-1}{y_k},$$

em que x_k é uma raiz de $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$, dessa forma

$$\left(\frac{y_k - 1}{y_k}\right)^n + \left(\frac{y_k - 1}{y_k}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{y_k - 1}{y_k} + 1 = 0.$$

A última igualdade é equivalente a

$$(y_k - 1)^n + y_k(y_k - 1)^{n-1} + \ldots + y_k^{n-1}(y_k - 1) + y_k^n = 0.$$

Segue que y_k é uma raiz do polinômio

$$P(x) = (x - 1)^n + x(x - 1)^{n-1} + \ldots + x^{n-1}(x - 1) + x^n.$$

Queremos calcular

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

Observe que

$$P(x) = (n + 1)x^n - x^{n-1}\left(\binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{1}{1}\right) + \ldots.$$

Usando relações de Girard, temos que

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{1}{1}}{n + 1} = \frac{n(n + 1)}{2(n + 1)} = \frac{n}{2}.$$

4. Seja $P(x) = x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$. Então, $P(-1) = 1 - 2 + 1 = 0$ e $P'(1) = -(4n + 2) + 2(2n + 1) = 0$.

5. Vamos primeiro considerar o caso em que $n \geq 2$. Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$. Então

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1.$$

Fazendo a identidade dos coeficientes de $x^{n(n-1)}$ na igualdade $P(P'(x)) = P'(P(x))$, obtemos

$$a_n^{n+1} \cdot n^n = a_n^n \cdot n.$$

Isto implica que $a_n n^{n-1} = 1$, ou seja, $a_n = \dfrac{1}{n^{n-1}}$. Como a_n deve ser inteiro, então $n = 1$, o que é uma contradição. Se $n = 1$, então $P(x) = ax + b$. Dessa forma, temos que $a^2 + b = a \Leftrightarrow b = a - a^2$. A resposta do problema são todos os polinômios da forma $P(x) = ax^2 + a - a^2$.

Bibliografia

1. Problem - Solving Strategies
Arthur Engel

2. Putnam and Beyond
Razvan Gelca e Titu Andreescu

3. Fundamentos de Matemática Elementar, vol.6
Gelson Iezzi

4. 101 Problems in Algebra: Form the training of the USA IMO team.
Titu Andreescu e Zuming Feng

5. Mathematical Olympiad Treasures
Titu Andreescu e Bogdan Enescu

6. Tópicos de Matemática Elementar, vol. 6
Antonio Caminha Muniz Neto