Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 8

Aplicações de raízes da unidade

Nesta aula vamos nos concentrar nas raízes do polinômio

$$P(x) = x^n - 1,$$

em que n é um inteiro positivo. As raízes desse polinômio são chamadas de **raízes n - ésimas da unidade**. É fácil ver que 1 é uma raiz desse polinômio. Mas quais são as outras? Quais as aplicações legais dessas raízes?

Teorema 1. As raízes de $P(x) = x^n - 1$ são

$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ 0 \leq k < n,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Use o Teorema 2 da aula 5.

Dessa forma

$$\omega_0 = \cos 0 + i \cdot s \sin 0 = 1;$$
$$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = \omega;$$
$$\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i \sin \cdot \frac{4\pi}{n} = \omega^2;$$
$$\cdots$$
$$\omega_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \omega^{n-1}.$$

As raízes n - ésimas da unidade determinam um polígono regular inscrito em um círculo unitário tal que um dos vértices é o ponto $(1, 0)$.

Para $n = 3$, as raízes cúbicas da unidade são

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{3},\ k \in \{0, 1, 2\},$$

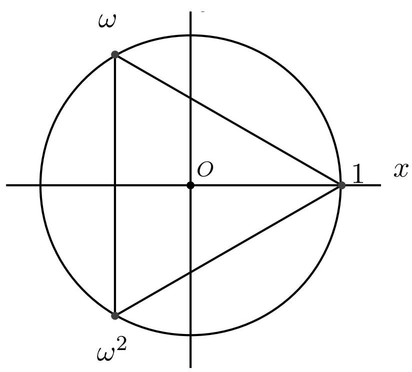
ou seja,

$$\omega_0 = 1,\ \omega_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega$$

e

$$\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2.$$

As raízes cúbicas da unidade determinam um triângulo equilátero inscrito em um círculo com centro em $(0,0)$ e raio 1, como podemos ver na figura a seguir.



Exercícios resolvidos

1. Prove que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$ em que $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots,\ \omega^{n-1}$ são as raízes n - ésimas da unidade.

   Solução.
   Temos que
   $$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$
   Assim, fazendo $x = \omega$, temos $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} = \dfrac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0.$

2. Calcule $\binom{2000}{2} + \binom{2000}{5} + \binom{2000}{8} + \ldots + \binom{2000}{2000}$.

   Solução.
   Seja
   $$f(x) = (1+x)^{2000} = \sum_{k=0}^{2000} \binom{2000}{k} x^k.$$

Seja $\omega = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Então, $\omega^3 = 1$ e $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Então

$$3\left(\binom{2000}{2} + \binom{2000}{5} + \binom{2000}{8} + \ldots + \binom{2000}{2000}\right)$$

$$= f(1) + \omega f(\omega) + \omega^2 f(\omega^2)$$

$$= 2^{2000} + \omega(1+\omega)^{2000} + \omega^2(1+\omega^2)^{2000}$$

$$= 2^{2000} + \omega(-\omega^2)^{2000} + \omega^2(-\omega)^{2000}$$

$$2^{2000} + \omega^2 + \omega = 2^{2000} - 1.$$

Dessa forma o valor da soma é

$$\frac{2^{2000} - 1}{3}.$$

3. (Leningrado) Dizemos que uma sequência $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ de números reais é p - balanceada para algum inteiro positivo p se

$$a_0 + a_p + a_{2p} + \ldots = a_1 + a_{p+1} + a_{2p+1} + \ldots = \ldots =$$

$$= a_{p-1} + a_{2p-1} + a_{3p-1} \ldots.$$

Se a sequência $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{49}$ é p - balanceada para $p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17$, prove que $a_0 = a_1 = \ldots = a_{49} = 0$.

Solução. Suponha que a sequência $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ é p - balanceada para algum p e seja S o valor das somas

$$a_0 + a_p + a_{2p} + \ldots,\ a_1 + a_{p+1} + a_{2p+1} + \ldots,\ \ldots,\ a_{p-1} + a_{2p-1} + a_{3p-1} + \ldots.$$

O próximo passo é introduzir o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Seja ω uma raiz p - ésima da unidade ($\omega \neq 1$), ou seja, $\omega^p = 1$. Assim, $\omega^r = \omega^{p+r} = \omega^{2p+r} = \omega^{3p+r} = \ldots$, para cada $r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$. Dessa forma, ω^k é igual a alguma das potências básicas $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^{p-1}$ para todo inteiro positivo k. Então

$$P(\omega) = a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + \ldots + a_1\omega + a_0$$

$$= (a_0 + a_p + a_{2p} + \ldots) + (a_1 + a_{p+1} + a_{2p+1} + \ldots)\omega + \ldots + (a_{p-1} + a_{2p-1} + a_{3p-1} + \ldots)\omega^{p-1}$$

$$= S(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{p-1}) = 0.$$

Portanto, ω é uma raiz de P. Voltando ao problema, o polinômio P possui grau 49. Dessa forma, para $p = 3$ o polinômio possuirá duas raízes, para $p = 5$ o polinômio possuirá quatro raízes e, assim sucessivamente, até que para $p = 17$ o polinômio possuirá 16 raízes. Finalmente, o polinômio P terá $2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 = 50$ raízes. Como P possui grau 49 então ele será identicamente nulo, ou seja, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{49} = 0$.

4. (USAMO) Se $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$ são polinômios tais que $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$, prove que $(x - 1)$ é um fator de $P(x)$.

Solução.

Seja $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{5}$, ou seja, $\omega^5 = 1$. Substituindo x por ω, ω^2, ω^3 e ω^4 na igualdade $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$, temos

$$P(1) + \omega Q(1) + \omega^2 R(1) = 0,$$

$$P(1) + \omega^2 Q(1) + \omega^4 R(1) = 0,$$
$$P(1) + \omega^3 Q(1) + \omega R(1) = 0,$$
$$P(1) + \omega^4 Q(1) + \omega^3 R(1) = 0.$$

Multiplicando cada uma das equações acima por $-\omega$, $-\omega^2$, $-\omega^3$ e $-\omega^4$, temos

$$-\omega P(1) - \omega^2 Q(1) - \omega^3 R(1) = 0,$$

$$-\omega^2 P(1) - \omega^4 Q(1) - \omega R(1) = 0,$$
$$-\omega^3 P(1) - \omega Q(1) - \omega^4 R(1) = 0,$$
$$-\omega^4 P(1) - \omega^3 Q(1) - \omega^2 R(1) = 0.$$

Somando as 8 igualdades e usando o fato que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ encontramos $5P(1) = 0 \Leftrightarrow P(1) = 0$, ou seja, $x - 1 | P(x)$.

5. Mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$ maior que 1 vale

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Solução.

Sejam 1, ω, ω^2, $\ldots$, ω^{n-1}, $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{n}$, as raízes do polinômio $x^n - 1$. Assim,

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - \omega)(x - \omega^2)\ldots(x - \omega^{n-1}).$$

Se dividirmos os dois lados da igualdade acima por $x - 1$, encontraremos

$$x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)\ldots(x - \omega^{n-1}).$$

Fazendo $x = 1$ na última equação temos

$$n = (1 - \omega)(1 - \omega^2)\ldots(1 - \omega^{n-1}).$$

A última igualdade implica que $n = |1-\omega||1-\omega^2|\ldots|1-\omega^{n-1}|$. Usando a definição de módulo de um número complexo temos

$$|1-\omega^k| = \sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{n}} = 2\sin\frac{k\pi}{n}$$

para $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Multiplicando tudo encontramos a igualdade desejada.

Exercícios propostos

1. (ARML) Seja z uma raiz de $x^5 - 1 = 0$, com $z \neq 1$. Determine o valor de $z^{15} + z^{16} + z^{17} + \ldots + z^{50}$.

2. (AIME) Seja z um número complexo tal que $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos 3^\circ$. Determine o menor inteiro maior que $z^{2000} + \dfrac{1}{z^{2000}}$.

3. (Harvard - MIT) O polinômio $f(x) = x^{2007} + 17x^{2006} + 1$ tem raízes distintas $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{2007}$. Um polinômio P de grau 2007 tem a propriedade que $P\left(r_j + \dfrac{1}{r_j}\right) = 0$ para $j = 1,\ \ldots,\ 2007$. Determine o valor de $\dfrac{P(1)}{P(-1)}$.

4. (OCM) Seja $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ os vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência unitária S e A um ponto dessa circunferência. Encontre o valor máximo do produto P dos n segmentos $A_1A,\ A_2A,\ \ldots\ A_nA$ e a posição de A para o qual esse máximo ocorre.

5. Prove que para todo natural n e α real satisfazendo $n > 1$ e $\sin\alpha \neq 0$, o polinômio

$$P(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

é divisível pelo polinômio $Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

6. (AIME) A equação

$$x^{10} + (13x-1)^{10} = 0$$

possui 10 raízes complexas $r_1,\ \overline{r_1},\ r_2,\ \overline{r_2},\ r_3,\ \overline{r_3},\ r_4,\ \overline{r_4},\ r_5,\ \overline{r_5}$. Determine o valor de

$$\frac{1}{r_1\overline{r_1}} + \frac{1}{r_2\overline{r_2}} + \frac{1}{r_3\overline{r_3}} + \frac{1}{r_4\overline{r_4}} + \frac{1}{r_5\overline{r_5}}.$$

7. Seja $f(x) = x^{2004}+2x^{2003}+3x^{2002}+\ldots+2004x+2005$ e $z = \cos\left(\frac{\pi}{1003}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{1003}\right)$. Expresse o produto
$$f(z)f(z^2)\ldots f(z^{2005})$$
na forma a^b, em que a e b são inteiros.

8. (AIME) Seja v e w números distintos escolhidos arbitrariamente entre as raízes de $z^{1997} - 1 = 0$. Determine a probabilidade de acontecer $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |v+w|$.

9. (Romênia) Seja U_n o conjunto das raízes n - ésimas da unidade. Prove que as afirmações a seguir são equivalentes:
a) existe um $\alpha \in U_n$ tal que $1+\alpha \in U_n$;
b) existe $\beta \in U_n$ tal que $1-\beta \in U_n$.

Bibliografia

1. Complex Numbers form A to Z
Titu Andreescu e Dorin Andrica

2. Equations and Inequalities
Jiri Herman, Radan Kucera e Jaromir Simsa

3. Precalculus
Richard Rusczyk

4. Problem - Solving Strategies
Arthur Engel

5. 101 Problems in Algebra - From the traninig of the USA IMO team
Titu Andreescu e Zuming Feng

6. Mathematical Miniatures
Svetoslav Savchev e Titu Andreescu