Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 9

Somas de Newton

Chamaremos de **somas de Newton** as somas das k - ésimas potências das raízes de um polinômio. Iniciaremos este material com alguns problemas que servem de motivação para a sequência da teoria.

Exemplo 1. Calcule $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$.

Solução. Seja $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Defina $\sigma_1 = x + y = 1$, $\sigma_2 = x \cdot y = -1$ e $S_k = x^k + y^k$, k natural. Temos que x e y são raízes do polinômio quadrático $P(z) = z^2 - z - 1$. Dessa forma,

$$x^2 - x - 1 = 0 \ (1)$$

e

$$y^2 - y - 1 = 0. \ (2)$$

Multiplique (1) por x^{k-2} e (2) por y^{k-2}, $k \geq 2$, assim

$$x^k - x^{k-1} - x^{k-2} = 0 \ (3)$$

e

$$y^k - y^{k-1} - y^{k-2} = 0. \ (4)$$

Adicionando (3) e (4) temos

$$x^k + y^k - (x^{k-1} + y^{k-1}) - (x^{k-2} + y^{k-2}) = 0. \Leftrightarrow$$

$$S_k - S_{k-1} - S_{k-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-2}.$$

Portanto,

$$S_0 = x^0 + y^0 = 1 + 1 = 2.$$

$$S_1 = x^1 + y^1 = x + y = 1$$

$$S_2 = S_1 + S_0 = 3$$
$$S_3 = S_2 + S_1 = 4$$
$$S_4 = S_3 + S_2 = 7$$
$$S_5 = S_4 + S_3 = 11$$
$$S_6 = S_5 + S_4 = 18$$
$$S_6 = S_5 + S_4 = 18$$
$$S_7 = S_6 + S_5 = 29$$
$$S_8 = S_7 + S_6 = 47$$
$$S_9 = S_8 + S_7 = 76$$
$$S_{10} = S_9 + S_8 = 123$$

Exemplo 2. Escreva $S_k = x^k + y^k$ em função de $S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$, $S_{k-2} = x^{k-2} + y^{k-2}$, $\sigma_1 = x + y$ e $\sigma_2 = x \cdot y$, $k \geq 2$.

Solução.
Seja $P(z) = z^2 - \sigma_1 \cdot z + \sigma_2$ um polinômio cujas raízes são x e y. Então,

$$x^2 - \sigma_1 \cdot x + \sigma_2 = 0 \ (1)$$

e

$$y^2 - \sigma_1 \cdot y + \sigma_2 = 0. \ (2)$$

Multiplicando (1) por x^{k-2} e (2) por y^{k-2}, $k \geq 2$, temos

$$x^k - \sigma_1 \cdot x^{k-1} + \sigma_2 \cdot x^{k-2} = 0 \ (3)$$

e

$$y^k - \sigma_1 \cdot y^{k-1} + \sigma_2 \cdot y^{k-2} = 0. \ (4)$$

Somando (3) e (4) temos

$$x^k + y^k - \sigma_1(x^{k-1} + y^{k-1}) + \sigma_2(x^{k-2} + y^{k-2}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$S_k - \sigma_1 \cdot S_{k-1} + \sigma_2 \cdot S_{k-2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$S_k = \sigma_1 \cdot S_{k-1} - \sigma_2 \cdot S_{k-2}.$$

Exemplo 3. Escreva $S_k = x^k + y^k + z^k$ em função de $S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1}$, $S_{k-2} = x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2}$, $S_{k-3} = x^{k-3} + y^{k-3} + z^{k-3}$, $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ e $\sigma_3 = xyz$, $k \geq 3$.

Solução.

Seja $P(z) = z^3 - \sigma_1 \cdot z^2 + \sigma_2 \cdot z - \sigma_3$ um polinômio cujas raízes são x, y e z. Então,

$$x^3 - \sigma_1 \cdot x^2 + \sigma_2 \cdot x - \sigma_3 = 0 \ (1)$$
$$y^3 - \sigma_1 \cdot y^2 + \sigma_2 \cdot y - \sigma_3 = 0 \ (2)$$
$$z^3 - \sigma_1 \cdot z^2 + \sigma_2 \cdot z - \sigma_3 = 0. \ (3)$$

Multiplicando (1) por x^{k-3}, (2) por y^{k-3} e (3) por z^{k-3}, $k \geq 3$, encontramos

$$x^k - \sigma_1 \cdot x^{k-1} + \sigma_2 \cdot x^{k-2} - \sigma_3 \cdot x^{k-3} = 0 \ (4)$$

$$y^k - \sigma_1 \cdot y^{k-1} + \sigma_2 \cdot y^{k-2} - \sigma_3 \cdot y^{k-3} = 0 \ (5)$$

$$z^k - \sigma_1 \cdot z^{k-1} + \sigma_2 \cdot z^{k-2} - \sigma_3 \cdot z^{k-3} = 0. \ (6)$$

Somando (4), (5) e (6), temos

$$x^k+y^k+z^k-\sigma_1\cdot(x^{k-1}+y^{k-1}+z^{k-1})+\sigma_2\cdot(x^{k-2}+y^{k-2}+z^{k-2})-\sigma_3\cdot(x^{k-3}+y^{k-3}+z^{k-3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$S_k - \sigma_1 \cdot S_{k-1} + \sigma_2 \cdot S_{k-2} - \sigma_3 \cdot S_{k-3} = 0 \Leftrightarrow$$
$$S_k = \sigma_1 \cdot S_{k-1} - \sigma_2 \cdot S_{k-2} + \sigma_3 \cdot S_{k-3}.$$

Teorema 1. (Newton) Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio e sejam r_1, r_2, $\ldots$, r_n as raízes do polinômio. Seja $S_k = r_1^k + r_2^k + \ldots + r_n^k$, $k \geq n$. Então, $a_n S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \ldots + a_0 S_{k-n} = 0$. Em particular, quando $k = n$, temos $a_n S_n + a_{n-1}S_{n-1} + \ldots + n a_0 = 0$.

Demonstração. Como r_1, r_2, $\ldots$, r_n são as raízes de $P(x)$ então

$$P(r_i) = a_n r_i^n + a_{n-1} r_i^{n-1} + \ldots + a_1 r_i + a_0 = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Multiplicando cada uma das equações por r_i^{k-n} encontramos

$$a_n r_1^k + a_{n-1} r_1^{k-1} + \ldots + a_0 r_1^{k-n} = 0$$

$$a_n r_2^k + a_{n-1} r_2^{k-1} + \ldots + a_0 r_2^{k-n} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_n r_n^k + a_{n-1} r_n^{k-1} + \ldots + a_0 r_n^{k-n} = 0$$

Somando todas as equações encontramos

$$a_n(r_1^k + \ldots + r_n^k) + a_{n-1}(r_1^{k-1} + \ldots + r_n^{k-1}) + \ldots + a_0(r_1^{k-n} + \ldots + r_n^{k-n}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_nS_k + a_{n-1}S_{k-1} + \ldots + a_0S_{k-n} = 0.$$

Em particular, quando $k = n$, $S_{k-n} = S_0 = r_1^0 + r_2^0 + \ldots + r_n^0 = n$, assim $a_nS_n + a_{n-1}S_{n-1} + \ldots + na_0 = 0$.

Exercícios Resolvidos

1. Sejam $r_1,\ r_2,\ \ldots, r_{1000}$ as raízes de $x^{1000} - 10x + 10 = 0$. Determine o valor de $r_1^{1000} + r_2^{1000} + \ldots + r_{1000}^{1000}$.

   Solução.

   Temos que a_{1000}, a_1 e a_0 são os únicos coeficientes diferentes de 0. Então, pelo teorema de Newton, $S_{1000} - 10S_1 + 1000 \cdot 10 = 0$. Como o coeficiente de x^{999} é zero temos que $S_1 = 0$ e $S_{1000} = -10000$.

2. (Bulgária) Sejam x e y números reais que satisfazem as equações

   $$x^2 + y^2 = 2$$

   $$x^3 + y^3 = 2\sqrt{2}.$$

   Ache o valor de $x^4 + y^4$.
   (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) $4\sqrt{2}$ (e) não pode ser determinado.

   Solução.

   Seja $\sigma_1 = x + y$ e $\sigma_2 = xy$ e usando as ideias do exemplo 2 temos que

   $$S_k = \sigma_1 \cdot S_{k-1} - \sigma_2 \cdot S_{k-2}.$$

   Assim

   $$S_2 = \sigma_1 \cdot S_1 - \sigma_2 \cdot S_0 \Leftrightarrow$$

   $$S_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_1 - 2\sigma_2 \Leftrightarrow$$

   $$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

   Da mesma forma

   $$S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 \Leftrightarrow$$

   $$S_3 = \sigma_1 \cdot (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2 \cdot \sigma_1 \Leftrightarrow$$

   $$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \cdot \sigma_2,$$

e

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 \Leftrightarrow$$
$$S_4 = \sigma_1 \cdot (\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \cdot \sigma_2) - \sigma_2 \cdot (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \Leftrightarrow$$
$$S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 + 2\sigma_2^2.$$

O enunciado diz que $S_2 = 2$ e $S_3 = 2\sqrt{2}$, assim

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2$$

e

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 2\sqrt{2}.$$

Queremos $S_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 + 2\sigma_2^2$, com x, y reais. Por outro lado, $(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 = 2^2 \Leftrightarrow \sigma^4 - 4\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 + 4\sigma_2^2 = 4 \Leftrightarrow S_4 + 2\sigma_2^2 = 4 \Leftrightarrow S_4 = 4 - 2\sigma_2^2$. Além disso,

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\sigma_1 \cdot (\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\sigma_1^2 \cdot (\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$
$$(2 + 2\sigma_2)(2 - \sigma_2)^2 = 8 \Leftrightarrow$$
$$(1 + \sigma_2)(4 - 4\sigma_2 + \sigma_2^2) = 4 \Leftrightarrow$$
$$4 - 4\sigma_2 + \sigma_2^2 + 4\sigma_2 - 4\sigma_2^2 + \sigma_2^3 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\sigma_2^3 - 3\sigma_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\sigma_2 = 0 \text{ ou } \sigma_2 = 3.$$

Finalmente, $S_4 = 4$ ou $S_4 = -14$. Como x, y são reais temos que $S_4 \geq 0$, ou seja, $S_4 = 4$.

3. Determine todas as soluções reais da equação $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$.

Solução.

Faça $\sqrt[4]{1-x} = a$ e $\sqrt[4]{15+x} = b$, assim $a^4 = 1 - x$ e $b^4 = 15 + x$. Dessa forma,

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 16 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Se $\sigma_1 = a + b = 2$ e $\sigma_2 = a \cdot b$. Assim, $S_4 = a^4 + b^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 2^4 - 16\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 16$. Assim, $\sigma_2 = 0$ ou $\sigma_2 = 8$.

1° **caso:** $\sigma_2 = 0$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a \cdot b = 0 \end{cases}$$

Assim, $a = 0$ e $b = 2$ ou $a = 2$ e $b = 0$. Se $a = 0$ e $b = 2$ então $x = 1$. Se $a = 2$ e $b = 0$ então $x = -15$.

2° **caso:** $\sigma_2 = 8$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a \cdot b = 8 \end{cases}$$

Nesse caso, a e b não são reais e, além disso, x não é real.

4. (OBM) Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de
$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2 \cdot (a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}.$$

Solução. Usando as ideias do exemplo 3, ou seja, $S_k = \sigma_1 \cdot S_{k-1} - \sigma_2 \cdot S_{k-2} + \sigma_3 \cdot S_{k-3}$, com $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$ e $\sigma_3 = abc$.

Além disso, $S_1 = \sigma_1 = 0$ então

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2\sigma_2,$$
$$S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0 = 3\sigma_3,$$
$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 + \sigma_3 \cdot S_1 = 2\sigma_2^2,$$
$$S_5 = \sigma_1 \cdot S_4 - \sigma_2 \cdot S_3 + \sigma_3 \cdot S_2 = -5\sigma_2 \cdot \sigma_3.$$

Portanto,
$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2 \cdot (a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2} = \frac{(3\sigma_3)^2 \cdot 2\sigma_2^2}{(-5\sigma_2 \cdot \sigma_3)^2} = \frac{18}{25}.$$

5. Sejam x, y números reais não nulos satisfazendo $x^2 + xy + y^2 = 0$. Determine $\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^{2001} + \left(\dfrac{y}{x+y}\right)^{2001}$.

Solução.

Observe que $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}=1$ e $\dfrac{x}{x+y}\cdot\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{xy}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{xy}{xy}=1$. É fácil ver que $\dfrac{x}{x+y}$ e $\dfrac{y}{x+y}$ são as raízes de $t^2-t+1=0$. Assim, $S_k=\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^k+\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^k$ satisfaz

$$\begin{cases} S_{k+2} = S_{k+1} - S_k, & k \geq 0 \\ S_0 = 2, & S_1 = 1 \end{cases}$$

A sequência S_k, $k \geq 0$, é $2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, \ldots$ e $S_k = S_l$ para $k \equiv l \pmod 6$. Portanto, $S_{2001} = S_3 = -2$.

Exercícios propostos

1. Sejam $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{20}$ as raízes de $x^{20}-19x+2$. Determine $r_1^{20}+r_2^{20}+\ldots+r_{20}^{20}$.

2. Sejam $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{20}$ as raízes de $x^{20}-19x^2+2$. Determine $r_1^{20}+r_2^{20}+\ldots+r_{20}^{20}$.

3. Fatore $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

4. Sejam x_1 e x_2 as raízes do polinômio $P(x)=x^2-6x+1$. Prove que $x_1^n+x_2^n$ é um inteiro não divisível por 5 para todo inteiro não negativo n.

5. Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ tais que as raízes $x_1,\ x_2$ e x_3 de $x^3-6x^2+ax+a=0$ satisfazem
$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0.$$

6. Mostre que se $a,\ b$ e $c \in \mathbb{R}$ e $a+b+c=0$, então
$$a^4+b^4+c^4=2(ab+ac+bc)^2.$$

7. Resolva o sistema de equações
$$x+y+z=2,$$
$$x^2+y^2+z^2=6,$$
$$x^3+y^3+z^3=8.$$

8. Sejam $a,\ b,\ c$ números reais não nulos tais que $a+b+c=0$ e $a^3+b^3+c^3=a^5+b^5+c^5$. Prove que $a^2+b^2+c^2=\dfrac{6}{5}$.

9. Se $a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$, prove que $abc = 0$.

10. Determine todas as soluções reais do sistema

$$x + y + z = 1$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1.$$

11. Prove que se $a + b + c = 0$, então

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

12. Prove que se $a + b + c = 0$, então

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

13. Sejam x_1 e x_2 as raízes do polinômio $P(x) = x^2 + x + c$. Determine o valor de c se

$$\frac{2x_1^3}{2 + x_2} + \frac{2x_2^3}{2 + x_1} = -1.$$

14. Prove que o número

$$c = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

é uma raiz de $F(x) = x^3 + \sqrt[3]{6}x^2 - 1$.

Bibliografia

1. Equations and inequalities - Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory
Jiri Herman, Radan Kucera e Jaromir Simsa

2. the Art of Problem Solving, vol. 2: and Beyond
Richard Rusczyk e Sandor Lehoczky

3. Problem - Solving Strategies
Arthur Engel

4. Tópicos de Matemática Elementar, vol. 6 - Polinômios
Antonio Caminha Muniz Neto

5. Polinômios Simétricos - Revista Eureka 25
Carlos A. Gomes