Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 10

Diferenças finitas e o polinômio interpolador de Lagrange.

1. Diferenças Finitas

Seja $P(x)$ um polinômio de grau m. Defina $\Delta^{k+1}P(n) = \Delta^k P(n+1) - \Delta^k P(n),\ \forall k \geq 1$, com $\Delta^1 P(n) = P(n+1) - P(n)$.

Teorema 1. Seja $P(x)$ um polinômio de grau m, em que $m > 0$. Então $\Delta^m P(n)$ é uma constante diferente de zero.

Demonstração.

Seja $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio qualquer. Então

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n) =$$

$$a_m(n+1)^m + a_{m-1}(n+1)^{m-1} + \ldots + a_1(n+1) + a_0 - (a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0).$$

É fácil ver que o grau de $\Delta P(n)$ é $m-1$ e seu termo de maior grau é $a_m\binom{m}{1}n^{m-1}$, pois $a_m \neq 0$.

Dessa forma, para $k \leq m$, o grau de $\Delta^k P(n)$ é $m-k$. Portanto, quando $k = m$ o grau de $\Delta^m P(n)$ é 0, assim $\Delta^m P(n)$ é uma constante diferente de zero.

Problema 1. Determine todos os polinômios $P(x)$ tais que $P(x+1) - P(x) = 2x + 1,\ \forall x$.

Solução. Temos que $\Delta P(n) = 2n + 1$, assim $\Delta^2 P(n) = \Delta P(n+1) - \Delta P(n) = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$. Como $\Delta^2 P(n)$ é constante e diferente de zero então $P(x)$ tem grau 2, ou seja, $P(x) = ax^2 + bx + c$, assim

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$2ax + a + b = 2x + 1, \forall x.$$

Dessa forma, $2a = 2$ e $a + b = 1$. Portanto, $a = 1$ e $b = 0$ e $P(x) = x^2 + c$, para alguma constante c.

Problema 2. (AIME) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_7$ números reais tais que

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1,$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12,$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123.$$

Determine o valor de $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$.

Solução.

Defina $P(n) = (n+1)^2x_1 + (n+2)^2x_2 + (n+3)^2x_3 + \ldots + (n+7)^2x_7$. Temos que $P(0) = 1$, $P(1) = 12$, $P(2) = 123$ e que $P(n)$ é um polinômio quadrático. Desejamos calcular o valor de $P(3)$. Assim

$$\Delta P(0) = P(1) - P(0) = 11,$$

$$\Delta P(1) = P(2) - P(1) = 111,$$

$$\Delta^2 P(0) = \Delta P(1) - \Delta P(0) = 100.$$

Dessa forma, $\Delta^2 P(n) = 100, \ \forall n$. Assim, $\Delta^2 P(1) = \Delta P(2) - \Delta P(1) \Leftrightarrow 100 = \Delta P(2) - 111 \Leftrightarrow \Delta P(2) = 211$. Mas, $\Delta P(2) = P(3) - P(2) \Leftrightarrow 211 = P(3) - 123 \Leftrightarrow P(3) = 334$.

2. Polinômio interpolador de Lagrange

Vamos resolver um problema que serve de motivação para a construção do polinômio interpolador de Lagrange.

Problema 3. Determine um polinômio quadrático tal que $P(-1) = -4$, $P(1) = 2$ e $P(2) = -1$.

Solução. Seja $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, então

$P(-1) = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = -4$, $P(1) = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 2$ e $P(2) = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = -1$.

Resolvendo o sistema linear encontramos $P(x) = -2x^2 + 3x + 1$.

Resolver um sistema linear pode ser muito trabalhoso e difícil se o grau do polinômio aumentar muito. Para resolver problemas deste tipo e outros problemas vamos estudar o **polinômio interpolador de Lagrange**.

Teorema 2. Dados $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $b_0, b_1, \ldots, b_n$ números complexos com $a_0, a_1, \ldots, a_n$ distintos, existe um único polinômio $P(x)$ tal que

$$P(\alpha_i) = \beta_i, \ 0 \leq i \leq n.$$

Demonstração:

Vamos inicialmente determinar o polinômio. Para isto, observe os polinômios

$$D_k(x) = \frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\dots(x-\alpha_n)}{(\alpha_k-\alpha_0)(\alpha_k-\alpha_1)\dots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n)}$$

é fácil ver que

$$D_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Agora multiplique $D_k(x)$ pelo número β_k e, então, adicione todos esses polinômios resultando no polinômio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k D_k(x)$$

que satisfaz as condições do enunciado. Para demonstrar a unicidade sejam P_1 e P_2 dois polinômios, que satisfazem as condições impostas. O Polinômio $H(x) = P_1(x) - P_2(x)$ tem grau no máximo n e possui $n+1$ raízes $\alpha_0, \ \alpha_1, \ \dots, \ \alpha_n$, portanto, é identicamente nulo. Com isso, $P_1(x) \equiv P_2(x)$.

O polinômio $D_k(x)$ não caiu do céu então vamos ver a sua construção. Temos que

$$D_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Como $D_k(\alpha_i) = 0$ para todo $i \neq k$, então

$$D_k(x) = C(x-\alpha_0)\dots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\dots(x-\alpha_n).$$

Para determinar o valor de C vamos substituir $x = \alpha_k$ e usar a condição $D_k(\alpha_k) = 1$. Então,

$$1 = C(\alpha_k-\alpha_0)\dots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n).$$

Portanto,

$$D_k(x) = \frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\dots(x-\alpha_n)}{(\alpha_k-\alpha_0)(\alpha_k-\alpha_1)\dots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n)}.$$

Problema 4. (Mandelbrot) Seja $P(x)$ um polinômio de grau 2 tal que $P(0) = \cos^3 10°$, $P(1) = \cos 10° \sin^2 10°$ e $P(2) = 0$. Determine $P(3)$.

Solução. Usando o polinômio interpolador de Lagrange temos

$$P(x) = P(0)\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + P(1)\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + P(2)\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

Como $P(0) = \cos^3 10°$, $P(1) = \cos 10° \sin^2 10°$ e $P(2) = 0$ então

$$P(x) = \cos^3 10^\circ \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

Queremos $P(3)$ assim

$$P(3) = \cos^3 10^\circ \cdot \frac{(3-1)(3-2)}{(0-1)(0-2)} + \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \cdot \frac{(3-0)(3-2)}{(1-0)(1-2)} + 0 \cdot \frac{(3-0)(3-1)}{(2-0)(2-1)} \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10^\circ \cdot 1 + \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \cdot (-3) \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ (1 - \cos^2 10^\circ) \Leftrightarrow$$

$$P(3) = 4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos 3 \cdot 10^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 5. (IMO Short List)Seja $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ e seja f um polinômio de grau 990 tal que $f(k) = F_k,\ k \in \{992,\ 993,\ \ldots, 1982\}$. Mostre que $f(1983) = F_{1983} - 1$.

Solução. Temos que $f(k+992) = F_{k+992}$, para $k = 0, 1, \ldots, 990$ e precisamos provar que $f(992 + 991) = F_{1983} - 1$. Seja $g(x) = f(x + 992)$, que também possui grau 990. Nosso novo problema é tal que se $g(k) = F_{k+992}$, para $k = 0, 1, \ldots, 990$, então $g(991) = F_{1983} - 1$. Usando o polinômio interpolador de Lagrange temos que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{990} g(k) \cdot \frac{(x-0)(x-1)\ldots(x-k+1)(x-k-1)\ldots(x-990)}{(k-1)(k-2)\ldots 1 \cdot (-1)\ldots(k-990)}.$$

Então

$$g(991) = \sum_{k=0}^{990} g(k) \binom{991}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} F_{k+992} (-1)^k.$$

Sabemos que $F_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, em que $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim,

$$\sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} F_{k+992}(-1)^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} a^{k+992}(-1)^k - \sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} b^{k+992}(-1)^k \right].$$

Usando binômio de Newton temos que

$$\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}a^{k+992}(-1)^k = a^{992}\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}(-a)^k = a^{992}\left[(1-a)^{991}+a^{991}\right].$$

Mas $a^2 = a+1$, então

$$a^{992}\left[(1-a)^{991}+a^{991}\right] = a(a-a^2)^{991}+a^{1983} = -a+a^{1983}.$$

Temos que $b^2 = b+1$ então

$$\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}F_{k+992}(-1)^k = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{1983}-b^{1983}-a+b)$$

$$= \frac{a^{1983}-b^{1983}}{\sqrt{5}} - \frac{a-b}{\sqrt{5}} = F_{1983}-1.$$

1. Determine o polinômio P, de menor grau possível, que satisfaz $P(1) = 3$, $P(2) = 7$, $P(3) = 13$, $P(4) = 21$ e $P(5) = 31$. (AHSME)

2. Um polinômio cúbico $f(n)$ satisfaz $f(0) = 5$, $f(1) = 4$, $f(2) = 17$ e $f(3) = 56$. Determine $f(4)$.

3. (AIME) A partir de uma sequência de números reais $A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$, defina ΔA como a sequência de números reais $a_2 - a_1,\ a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, em que o n - ésimo termo é $a_{n+1} - a_n$. Se todos os termos da sequência $\Delta(\Delta A)$ são iguais a 1, e que $a_{19} = a_{92} = 0$, determine a_1.

4. Determine um polinômio de grau 3 tal que:
(a) $P(1) = 2,\ P(2) = 1,\ P(3) = 4$ e $P(4) = 3$.
(b) $P(1) = 1,\ P(i) = 2,\ P(-1) = 3$ e $P(-i) = 4$.

5. Se f é um polinômio de grau n tal que $f(i) = 2^i$ para $i = 0,\ 1,\ \ldots, n$, determine $f(n+1)$.

6. (Mandelbrot) Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(0) = 1$, $P(1) = -1$, $P(2) = 1$, $P(3) = -1$, $\ldots$, $P(n) = (-1)^n$. Determine $P(n+1)$.

7. (Mandelbrot) Se $P(x)$ é um polinômio de grau n com $P(1) = 1$, $P(2) = 3$, $P(4) = 9$, $\ldots$ e $P(2^n) = 3^n$. Determine $P(2^{n+1})$.

8. (USAMO)Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, determine $P(n+1)$.

9. (IMO Short List)Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(i) = \dfrac{1}{\binom{n+1}{k}}$, para $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Determine $P(n+1)$.

10. Resolva o sistema

$$\begin{cases} ax_1 & + & a^2x_2 & + & a^3x_3 & + & a^4x_4 & = & 1 \\ bx_1 & + & b^2x_2 & + & b^3x_3 & + & b^4x_4 & = & 1 \\ cx_1 & + & c^2x_2 & + & c^3x_3 & + & c^4x_4 & = & 1 \\ dx_1 & + & d^2x_2 & + & d^3x_3 & + & d^4x_4 & = & 1 \end{cases}$$

se $a,\ b,\ c,\ d$ são reais não - nulos e distintos.

11. (Reino Unido) Sejam $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ números inteiros positivos distintos. Prove que para qualquer inteiro positivo k o número $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$ é um inteiro.

12. Sejam $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ n \geq 2$, n números reais distintos no intervalo $[-1, 1]$. Prove que

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n} \geq 2^{n-2},$$

em que $\displaystyle\prod_{j\neq i} |x_i - x_j|$.

13. Prove que se m e n são inteiros, $1 < m < n$, então

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0.$$

14. Prove a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k^{n+1} \binom{n}{k} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

15. Seja $f \in \mathbb{R}[X]$ um polinômio de grau n com coeficiente líder igual a 1, e sejam $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ números inteiros. Prove que existe $k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$ tal que

$$|f(x_k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

16. (IMO Short List - 1997) Seja f um polinômio com coeficientes inteiros, e seja p um número primo tal que $f(0) = 0,\ f(1) = 1$ e $f(k)$ é congruente a 0 ou 1 módulo p, para todo inteiro positivo k. Mostre que o grau de f é no mínimo $p - 1$.

17. (USAMO) Prove que qualquer polinômio mônico de grau n, com coeficientes reais, pode ser escrito como média aritmética de dois polinômios mônicos de grau n com n raízes reais cada.

18. Sejam $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ b_1,\ b_2,\ b_3, b_4$ números reais tais que $b_i - a_j \neq 0$ para $i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Suponha que exista um único conjunto de números $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$ tais que
$$\frac{X_1}{b_1 - a_1} + \frac{X_2}{b_1 - a_2} + \frac{X_3}{b_1 - a_3} + \frac{X_4}{b_1 - a_4} = 1.$$
$$\frac{X_1}{b_2 - a_1} + \frac{X_2}{b_2 - a_2} + \frac{X_3}{b_2 - a_3} + \frac{X_4}{b_2 - a_4} = 1.$$
$$\frac{X_1}{b_3 - a_1} + \frac{X_2}{b_3 - a_2} + \frac{X_3}{b_3 - a_3} + \frac{X_4}{b_3 - a_4} = 1.$$
$$\frac{X_1}{b_4 - a_1} + \frac{X_2}{b_4 - a_2} + \frac{X_3}{b_4 - a_3} + \frac{X_4}{b_4 - a_4} = 1.$$
Determine $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ em função de $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ b_1,\ b_2,\ b_3, b_4$.

Bibliografia

1. Problems from the book
Titu Andreescu e Gabriel Dospinescu

2. Winning Solutions
Edward Lozansky e Cecil Rousseau

3. The Mandelbrot Problem Book
Sam Vandervelde

4. Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II
Serge Tabachnikov

5. Lagrange Interpolation Formula
Kin Y. Li
Mathematical Excalibur - July - September, 2010