Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 11

Polinômios em $Z[x]$ (1)

Dizemos que $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1 e a_0 inteiros.

Teorema 1. Sejam a e b números inteiros distintos e $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros, então $a - b | P(a) - P(b)$.

Demonstração.
Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$com a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1 e a_0 inteiros. Então,

$$\begin{aligned}
P(a) - P(b) &= (a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0) - (a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i (a^i - b^i) \\
&\sum_{i=0}^{n} a_i (a-b)(a^{i-1} + \ldots + b^{i-1}) \\
&= (a-b)\left[\sum_{i=0}^{n} a_i (a^{i-1} + \ldots + b^{i-1})\right] = (a-b)\cdot k,\ \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Portanto, $a - b | P(a) - P(b)$.

Problema 1. Seja P um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Seja x um real tal que:
(i) $P(x) = 0$
(ii) $P(\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil) = 2P(1) + P(0) + 1$.
Prove que x é irracional.

Solução.

Lema: O número $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$ é par se, e somente se, x é inteiro.

Demonstração. Se x é inteiro, então $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$, então $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 2x$, que é um número par. Se x não é inteiro, então $k < x < k+1$, para algum inteiro k. Logo $\lfloor x \rfloor = k$ e $\lceil x \rceil = k+1$, onde $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 2k+1$, que é um número ímpar. Por outro lado, x é uma raiz do polinômio pela condição i. Pelo teorema das raízes racionais e como P é mônico então toda raiz racional é inteira. Portanto, basta mostrar que x não é inteiro.//
Se x é inteiro então $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$ é par. Dessa forma,

$$\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil | P(\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil) - P(0) = 2P(1) + 1,$$

ou seja, $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$ deveria ser ímpar. Portanto, x é irracional.

Problema 2. Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros tal que $P(21) = 17$, $P(32) = -247$ e $P(37) = 33$. Prove que se $P(N) = N + 51$ para algum inteiro N, então $N = 26$.

Solução. Usando o teorema 1 temos

$$N - 21 | N + 34 \Rightarrow N - 21 | N + 34 - (N - 21) \Rightarrow N - 21 | 55 \ (1)$$

$$N - 32 | N + 298 \Rightarrow N - 32 | N + 298 - (N - 32) \Rightarrow N - 32 | 330 \ (2)$$

$$N - 37 | N + 18 \Rightarrow N - 37 | N + 18 - (N - 37) \Rightarrow N - 37 | 55 \ (3)$$

De (1) temos que $N - 21 = \pm 1$, ± 5, ± 11 ou ± 55. Os possíveis valores de N são: 22, 20, 26, 16, 32, 10, 76 e -34. O único destes valores de N que não contradiz 2 e 3 é $N = 26$.

Problema 3. (Peru TST) Seja k um inteiro positivo e seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros. Prove que existe um inteiro positivo n tal que

$$P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$$

é divisível por k.

Solução. Pelo teorema 1 temos que $P(kj + i) \equiv P(i) \pmod{kj}$, em particular, $P(kj + i) \equiv P(i) \pmod{k}$. Logo,

$$P(1) + P(2) + \ldots + P(k^2) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k} P(kj + i)$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k} P(i) \pmod{k}$$

$$\equiv k\left(\sum_{i=1}^{k} P(i)\right) \pmod{k}$$
$$\equiv 0 \pmod{k}$$

Logo, considerando $n = k^2$, temos que $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ é divisível por k.

Exercícios propostos

1. (USAMO) Sejam a, b e c números inteiros distintos. Prove que não é possível encontrar um polinômio $P(x)$ de coeficientes inteiros tal que $P(a) = b$, $P(b) = c$ e $P(c) = a$.

2. (AIME) Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros tal que $P(17) = 10$ e $P(24) = 17$. Além disso, a equação $P(n) = n + 3$ possui duas soluções inteiras distintas n_1 e n_2. Calcule $n_1 \cdot n_2$.

3. (IMO) Seja $P(x)$ um polinômio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja k um inteiro positivo. Considere o polinômio $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, onde P ocorre k vezes. Prove que existem no máximo n inteiros t tais que $Q(t) = t$.

4. (Romênia TST) Seja n um inteiro positivo e
$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
com $m \geq 2$, um polinômio com coeficientes inteiros, tal que:
i. $a_2,\ a_3,\ \ldots, a_m$ são divisíveis por todos os fatores primos de n,
ii. a_1 e n são primos entre si.
Prove que para qualquer inteiro positivo k, existe um inteiro positivo c, tal que $f(c)$ é divisível por n^k.

5. (Baltic Way) Seja P um polinômio com coeficientes inteiros tal que $P(-n) < P(n) < n$ para algum inteiro n. Prove que $P(-n) < -n$.

Bibliografia

1. III Olimpiada Nacional Escolar de Matematica - 2006
Jorge Tipe, John Cuya, Claudio Espinoza e Sergio Vera