Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 13

Substituição trigonométrica.

Um método de resolução para equações e inequações algébricas bastante eficiente é o da substituição trigonométrica. Vamos ver alguns exemplos.

Problema 1. Sejam a, b, c e d números reais tais que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Determine $ab + cd$.

Solução. Se $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$ então $a = \sin\alpha$, $b = \cos\alpha$, $c = \sin\beta$ e $d = \cos\beta$, em que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e $0 \leq \beta \leq 2\pi$. Neste caso temos

$$ac + bd = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

Pelas condições do problema $ac + bd = 0 = \cos(\alpha - \beta)$. Além disso,

$$ab + cd = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta =$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Problema 2. Resolva a equação $x^3 - 3x = \sqrt{x + 2}$.

Solução. É fácil ver que $x \geq -2$. Considere os seguintes casos:
1. $-2 \leq x \leq 2$. Faça $x = 2\cos a$, $0 \leq a \leq \pi$, a equação resultante é

$$8\cos^3 a - 6\cos a = \sqrt{2(\cos a + 1)} \Leftrightarrow$$

$$2\cos 3a = \sqrt{4\cos^2\frac{a}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\cos 3a = \cos\frac{a}{2}.$$

Então, $3a - \dfrac{a}{2} = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$ ou $3a + \dfrac{a}{2} = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Como $0 \leq a \leq \pi$, as soluções neste caso são

$$x = 2\cos 0 = 2,\ x = 2\cos\frac{4\pi}{5} \text{ e } x = 2\cos\frac{4\pi}{7}.$$

2. $x > 2$. Então $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) > 0$ e

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > \sqrt{x + 2}.$$

Portanto,

$$x^3 - 3x > x > \sqrt{x + 2},$$

e, com isso, não temos soluções.

Problema 3. Sejam a, b e c números reais. Prove que

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1).$$

Solução. Seja $a = \tan x$, $b = \tan y$ e $c = \tan z$ com $-\dfrac{\pi}{2} < x, y, z < \dfrac{\pi}{2}$. Então $a^2 + 1 = \sec^2 x$, $b^2 + 1 = \sec^2 y$ e $c^2 + 1 = \sec^2 z$. Multiplicando os dois lados da desigualdade por $\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z$ encontramos

$$[(ab + bc + ca - 1)\cos x \cos y \cos z]^2 \leq 1.$$

É fácil ver que

$$(ab + bc)\cos x \cos y \cos z = \sin x \sin y \cos z + \sin y \sin z \cos x = \sin y \sin(x + z)$$

e

$$\begin{aligned}(ca - 1)\cos x \cos y \cos z &= \sin z \sin x \cos y - \cos x \cos y \cos z \\ &= -\cos y \cos(x + z).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}&[(ab + bc + ca - 1)\cos x \cos y \cos z]^2 \\ &= [\sin y \sin(x + z) - \cos y \cos(x + z)]^2 \\ &= \cos^2(x + y + z) \leq 1.\end{aligned}$$

Problemas propostos

1. (OBMU) Resolva a equação em $\mathbb{R}$: $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$.

2. (ITA) Para quais valores do parâmetro real a existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1 - x^2} \geq a - x$.

3. Dados quatro números reais distintos no intervalo $(0,1)$, mostre que existem dois deles, x e y, tais que
$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

4. (IME) Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação $\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{2}x$, para $x \in \mathbb{R}$ e $0 \le x \le a$.

5. Determine todas as soluções reais da equação $x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}(2x^2-1)$.

6. Seja x_n uma sequência satisfazendo
$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}},\ n \ge 1.$$
Prove que a sequência é periódica.

7. A sequência x_n satisfaz $\sqrt{x_{n+2}+2} \le x_n \le 2$ para todo $n \ge 1$. Determine todos os possíveis valores de x_{1986}.

8. Sejam a, b e c números reais tais que $ab+ac+bc=1$. Prove que
$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

9. Determine o maior valor de
$$S = (1-x_1)(1-y_1) + (1-x_2)(1-y_2)$$
se $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2$.

Bibliografia

1. Métodos no estándares para la resolución de ecuaciones y desigualdades.
V. P. Suprún

2. Mathematical Olympiad Challenges
Titu Andreescu e Razvan Gelca

3. 103 trigonometry problems - From the training of the USA IMO team
Titu Andreescu e Zuming Feng