Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 14

Revisão I.

Problema 1. Sejam x, y e z números reais tais que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$. Prove que

$$(x-1)(y-1)(z-1)\geq 8.$$

Solução. A desigualdade é equivalente a

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{y-1}{y}\right)\left(\frac{z-1}{z}\right)\geq\frac{8}{xyz}\Leftrightarrow$$
$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{1}{z}\right)\geq\frac{8}{xyz}.$$

Usando a condição inicial e MA $\geq$ MG temos que

$$1-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 2\sqrt{\frac{1}{y}\frac{1}{z}}=\frac{2}{\sqrt{yz}}.$$

Analogamente, $1-\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{2}{\sqrt{zx}}$ e $1-\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{2}{\sqrt{xy}}$. Multiplicando as três desigualdades verificamos a validade da desigualdade inicial. A igualdade ocorre se, e somente se, $x=y=z=3$.

Problema 2. Sejam a, b, $c\in\mathbb{R}_+^*$. Prove a desigualdade

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)}\leq\frac{1}{81}.$$

Solução. Temos que

$$(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)$$
$$=\left(1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)\left(a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\right)(c+8+8)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{bc^2}{4}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{64c}{4}}\geq 81abc.$$

Então,

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)}\leq\frac{1}{81}.$$

Problema 3. (Colômbia) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que se a função

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{1}{3}(f(x))^3$$

é periódica, então a função f também será.

Solução. Note que $F(x) = g(f(x))$, em que $g(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ é uma função estritamente crescente. Seja T o período de F, ou seja, $F(x+T) = F(x)$ para todo x. Como g é estritamente crescente então ela é também injetora. Dessa forma, $g(f(x+T)) = g(f(x)) \Rightarrow f(x+T) = f(x)$ para todo x, ou seja, f é periódica.

Exercícios propostos

1. Sejam a, b, c e d números reais positivos. Prove que $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1) \geq 81abcd$.

2. Prove que para quaisquer x, y reais positivos então $\dfrac{x}{x^4+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^4} \leq \dfrac{1}{xy}$.

3. Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+x)(y+z)}} +$$

$$\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

4. Sejam x, y, z números reais positivos tais que $x^4+y^4+z^4 = 1$. Determine o valor mínimo de

$$\frac{x^3}{1-x^8} + \frac{y^3}{1-y^8} + \frac{z^3}{1-z^8}.$$

5. Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer k, m e n, vale $f(km) + f(kn) - f(k)f(mn) \geq 1$.

6. (Rioplatense) A cada número inteiro positivo n associamos um inteiro não - negativo $f(n)$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:
(i) $f(ab) = f(a) + f(b)$,
(ii) $f(n) = 0$, se n é primo maior que 10,
(iii) $f(1) < f(243) < f(2) < 10$.
Ache $f(1998)$ sabendo que é menor que 10.

7. (Coréia) Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $f(1,1) = 2$,

$$f(m+1, n) = f(m, n) + m \text{ e}$$

$$f(m, n+1) = f(m, n) - n$$

para todos $m,\ n \in \mathbb{N}$. Ache todos os pares (p, q) tais que $f(p, q) = 2001$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ uma função tal que $f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é periódica.

9. (Irã) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função estritamente decrescente tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x+y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x))).$$

Prove que $f(f(x)) = x$.

10. Seja n um inteiro positivo ímpar e sejam $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ números reais distintos. Encontre todas as funções bijetivas

$$f : \{x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n\} \to \{x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n\}$$

tais que $|f(x_1) - x_1| = |f(x_2) - x_2| = \ldots = |f(x_n) - x_n|$.