Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 15

Funções definidas implicitamente III

Problema 1. A função f satisfaz a equação $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$ para todo x real. Prove que esta função é periódica.

Solução. Usando a equação que foi dada temos que

$$\begin{aligned} f(x+2)+f(x) &= \sqrt{2}f(x+1) \\ &= \sqrt{2}\left[\sqrt{2}f(x)-f(x-1)\right] \\ &= 2f(x)-\sqrt{2}f(x-1) \Leftrightarrow \\ f(x+2) &= f(x)-\sqrt{2}f(x-1). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} f(x+4) &= f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1) \\ &= f(x)-\sqrt{2}\left[f(x+1)+f(x-1)\right] \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x+8)=-f(x+4)=f(x).$$

Problema 2. (Irã) Seja $f:\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função estritamente decrescente tal que para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}_+^*$,

$$f(x+y)+f(f(x)+f(y))=f(f(x+f(y))+f(y+f(x))).$$

Prove que $f(f(x))=x$.

Solução. Fazendo $y=x$ temos

$$f(2x)+f(2f(x))=f(2f(x+f(x))).$$

Na última igualdade substitua x por $f(x)$ então

$$f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f(2f(f(x) + f(f(x)))).$$

Subtraindo as duas igualdades temos que

$$f(2f(f(x))) - f(2x) = f(2f(f(x) + f(f(x)))) - f(2f(x + f(x))).$$

Se $f(f(x) > x$, o lado esquerdo da última igualdade é um número negativo, então

$$f(f(x) + f(f(x)) > f(x + f(x)) \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(f(x)) < x + f(x),$$

o que é uma contradição. Uma contradição semelhante ocorre se $f(f(x)) < x$. Portanto, $f(f(x)) = x$.

Problema 3. (Tchecoslováquia) Seja $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função tal que

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Prove que $f(x) = x$ para todo x.

Solução. Fazendo $x = y$ temos que $f(xf(x)) = x^2$ e, em particular para $x = 1$, $f(f(1)) = 1$. Assim,

$$f(1)^2 = f(f(1) \cdot f(f(1))) = f(f(1)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = 1.$$

Fazendo $y = 1$ na equação original temos que $f(x) + f(f(x)) = 2x$. Esta condição implica que se $f(a) = f(b)$ então $a = b$, ou seja, f é injetora. Agora vamos fazer a substituição $x = zf(z)$ e $y = \dfrac{1}{z}$, com $z > 0$, e lembrando que $f(zf(z)) = z^2$ temos:

$$f\left(zf(z)f\left(\frac{1}{z}\right)\right) + f\left(\frac{1}{z}f(zf(z))\right) = 2zf(z)\frac{1}{z} \Leftrightarrow$$

$$f\left(zf(z)f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = f(z).$$

Como f é injetora segue que $f(z) \cdot f\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1$. Fazendo $x = z$ e $y = \dfrac{1}{z}$ na equação original temos que

$$f\left(zf\left(\frac{1}{z}\right)\right) + f\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2.$$

Como $f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{f(z)}$ então

$$f\left(\frac{z}{f(z)}\right) + f\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2.$$

Além disso,

$$f\left(\frac{z}{f(z)}\right) \cdot f\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 1.$$

Portanto,

$$f\left(\frac{z}{f(z)}\right) = f\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 1 = f(1) \Leftrightarrow$$

$$f(z) = z.$$

Exercícios propostos

1. (Austrália) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ uma função tal que $f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é periódica.

2. (Austrália) Prove que existe uma única função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e $f(x) + f(y) = 1 + f(x+y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^*$ tais que $x + y \neq 0$.

3. (Austrália) Determine todas as funções reais $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$ tais que $f(1) = \dfrac{1}{2}$ e $f(xy) = f(x)f\left(\dfrac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\dfrac{3}{x}\right)$.

4. (IMO) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para alguma constante positiva a, f satisfaz

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Prove que f é periódica.

5. (IMO) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x^2 + f(y)) = f(x)^2 + y,$$

   para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.