Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 3

Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 16

Sequências I

1. Progressão Aritmética

Definição 1: Uma progressão aritmética é uma sequência $a_1,\ a_2,\ \ldots$ ou somente (a_n) (finita ou infinita) satisfazendo $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = r$; sendo r chamado de razão da progressão.

Teorema 1. Se (a_n) é uma progressão aritimética de razão r, então

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

para todo n inteiro e positivo.

Demonstração. Pela definição de progressão aritmética, temos

$$a_2 - a_1 = r$$

$$a_3 - a_2 = r$$

$$a_4 - a_3 = r$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = r.$$

Somando essas $n-1$ igualdades, obtemos $a_n - a_1 = (n-1)r$, isto é, $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Problema 1. Prove que não existem inteiros positivos a e r tais que os números

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \ldots,\ a+nr, \ldots$$

sejam todos quadrados perfeitos.

Solução. Suponha que existem a e r como desejado. Para k suficientemente grande temos $a + kr > \left(\dfrac{r-1}{2}\right)^2$ e $a + kr = q^2$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Mas neste caso temos $q > \dfrac{r-1}{2}$, donde

$$(q+1)^2 = q^2 + 2q + 1 > q^2 + 2\left(\frac{r-1}{2}\right) + 1 = a + kr + r = a + (k+1)r.$$

Logo, $a + (k+1)r$ não será quadrado perfeito. Um absurdo!

Problema 2. Prove que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem ser termos de uma mesma progressão aritmética.

Problema 3. Prove que os termos de uma P.A. qualquer em que 0 não participa verficam a relação:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Problema 4. Prove que se a, b e c são números positivos então a^2, b^2 e c^2 estão em P.A. se, e somente se, $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ e $\dfrac{1}{a+b}$ também estão em P.A.

Problema 5. Prove que se uma progressão aritmética de inteiros positivos contém um quadrado, então irá conter infinitos quadrados.

Problema 6. O conjunto dos inteiros positivos é particionado em várias progressões aritméticas. Prove que pelo menos um dos termos iniciais é divisível pela razão de sua progressão.

Problema 7. Prove que os termos de uma P.A. qualquer em que 0 não participa verficam a relação:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

Problema 8. (Putnan) Prove que não existem quatro coeficientes binomiais consecutivos

$$\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$$

(n, k inteiros positivos e $4 \leq k + 3 \leq n$) que estão em progressão aritmética.

Problema 9. (OCM) Os lados de um triângulo medem 3, 7 e 8, respectivamente. Mostre que os ângulos deste triângulo, medidos em graus, então em progressão aritmética.

Teorema 2. A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_n) = (a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n,\ \ldots)$ é igual a

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Saí, $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)$.

Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$.

Logo, $2S_n = (a_1 + a_n)n$ e $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Problema 10. (OCM) Seja $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + -1998^2 + 1999^2$. Expresse S como a soma de 1000 números ímpares, todos eles termos de uma progressão aritmética.

Solução. Usaremos apenas a fatoração da diferença de dois quadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Assim, teremos:

$$S = 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + \ldots + (1999^2 - 1998^2)$$

$$= 1 + (3 + 2)(3 - 2) + (5 + 4)(5 - 4) + \ldots + (1999 + 1998)(1999 - 1998)$$

$$= 1 + 5 + 9 + \ldots + 3997.$$

Esta última expressão contém extamente 1000 números ímpares em P.A.

Problema 11. (China) Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n). Se $S_{15} > 0$ e $S_{16} < 0$, determine o maior entre os números $\dfrac{S_1}{a_1}, \dfrac{S_2}{a_2}, \ldots, \dfrac{S_{15}}{a_{15}}$.

Problema 12. Demonstre que em toda P.A., com número ímpar de termos, o termo médio é igual à diferença entre a soma dos termos de ordem ímpar e a soma dos termos de ordem par.

Problema 13. (Espanha) Calcule a soma dos quadrados dos 100 primeiros termos de uma progressão aritmética, dado que a soma dos 100 primeiros termos é -1 e a soma dos termos de ordem par $(a_2,\ a_4,\ \ldots,\ a_{100})$ é 1.

Problema 14. Suponha que $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ estão em progressão aritmética. Ache a fórmula para $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ em termos de n, a_1 e a_n.

Problema 15. (ITA) Numa progressão aritmética com n termos, $n > 1$, sabemos que o primeiro termo é igual a $\dfrac{1+n}{n}$ e a soma deles vale $\dfrac{1+3n}{2}$. Então o produto da razão desta progressão pelo último termo é igual a:
(a) $2n$ (b) $\dfrac{2}{n}$ (c) $3n$ (d) $\dfrac{3}{n}$ (e) $5n$

Problema 16. (ITA) Seja $a_1,\ a_2,\ \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

Problema 17. (IME) Determine as possíveis progressões aritméticas para as quais o resultado da divisão da soma dos seus n primeiro termos pela soma dos seus $2n$ primeiros termos seja independente do valor de n.

Problema 18. (AIME) Seja a_1, a_2, a_3, $\ldots$ uma progressão geométrica com razão 1 tal que

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{98},$$

$$S_2 = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_9 8.$$

(a) Ache uma equação relacionando S_1 e S_2.
(b) Determine o valor de S_2 sabendo que $S_1 = 137$.

2. Progressão Geométrica

Definição 2: Uma sequência $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ é uma progressão geométrica se existe um número q tal que para cada $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

$$a_{k+1} = qa_k$$

Teorema 3. Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão q,então

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

para todo inteiro positivo n.

Demonstração. Pela definição de progressão geométrica e admitindo conhecidos o primeiro termo ($a_1 \neq 0$), a razão ($q \neq 0$) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} q$$

Multiplicando essas $n-1$ igualdades, temos:

$$a_2 a_3 a_4 \ldots a_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} q^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$$

Teorema 4. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $(a_n) = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)$ é igual a

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}.$$

Demonstração. Temos:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}. \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros por q, obtemos:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n. \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) = a_1 q^n - a_1.$$

Supondo $q \neq 1$, resulta:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}.$$

Teorema 5. Se $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \ldots)$ é uma P.G. com razão q tal que $-1 < q < 1$,então

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

A demonstração do teorema 5 ficará como exercício.

Problema 19. Determine a razão de uma P.G. de termos não nulos tal que

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Solução. Sabemos que $a_n = a_1 q^{n-1}$. Então

$$a_1 q^{n+1} = a_1 q^n + a_1 q^{n-1} \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Problema 20. Prove que podemos eliminar alguns termos de um progressão aritmética de inteiros positivos de tal maneira, que sempre podemos rearranjar os termos formando uma progressão geométrica.

Problema 21. (OCM) Determine a soma dos n primeiros termos da sequência:

$$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ 1+2+2^2+2^3,\ \ldots,\ 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1},\ldots$$

Problema 22. Três números reais não nulos $x,\ y,\ z$, nessa ordem, estão em P.A. Seus quadrados, na mesma ordem, também estão em P.A. Nessas condições, prove que x, y, z, nessa ordem, também estão em P.G.

Problema 23. Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, cada uma, 200 termos e $a_1 = b_1 = 3$ e $a_2 = b_2 = 12$. Determine os valores de i para os quais a_i é um divisor de b_i.

Problema 24. (OCM) (a) Sabendo - se que os três lados de um triângulo retângulo, de hipotenusa a, então em progressão geométrica. Determine os catetos do triângulo em função apenas de a.
(b) Mostre que a altura relativa à hipotenusa também faz parte da progressão.

Problema 25. Suponha que $a_1 = 2$ e $a_{k+1} = 3a_k + 1$ para todo $k \geq 1$. Ache uma fórmula geral para $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Problema 26. (AIME) A soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica é 2005. Uma nova sequência obtida elevando ao quadrado cada termo da sequência original, tem soma dez vezes maior que a soma original. Determine a razão da sequência original.

Bibliografia

1. Fundamentos de matemática elementar 4
Gelson Iezzi e Samuel Hazzan

2. Intermediate Algebra
Richard Rusczyk e Mathew Crawford