Polos Olímpicos de Treinamento
Curso de Álgebra - Nível 3
Prof. Cícero Thiago / Prof. Marcelo Mendes

Aula 17

Sequências II

1. Recorrências lineares

Uma recorrência linear de ordem k com coeficientes constantes em uma variável é

$$f_n = c_{n-1}f_{n-1} + c_{n-2}f_{n-2} + \ldots + c_{n-k}f_{n-k} + g(n),$$

em que c_1, c_2, c_3, $\ldots$, c_{n-k} são constantes e $g(n)$ é uma função de n. A recorrência linear é chamada homogênea se $g(n) \equiv 0$ e, não homogênea, caso contrário.

2. Recorrências lineares de ordem 2 homogêneas

Teorema 1. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que, para todo $k \geq 1$ inteiro, tenhamos

$$f_{k+2} + rf_{k+1} + sf_k = 0,$$

onde r, s são constantes reais dadas, sendo $r \neq 0$. Se a equação $x^2 + rx + s = 0$, chamada de equação característica, tiver raízes reais α e β, então existem constantes reais A e B, determinadas pelos valores de f_1 e f_2, tais que:
(a) Se $\alpha \neq \beta$, então $f_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.
(b) Se $\alpha = \beta$, então $f_n = A\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Problema 1. Determine o termo geral da sequência de Fibonacci definida por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_1 = F_2 = 1$.

Solução.
A equação característica associada à equação em questão ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) é

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

cujas raízes são $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. As condições $F_1 = F_2 = 1$ implicam no sistema:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot A + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot B = 1, \end{cases}$$

cuja solução é $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ e $B = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Obtemos, portanto, a conhecida fórmula para F_n:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \text{ para } n \geq 1.$$

Problema 2. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e, para todo inteiro positivo k, $a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$. Calcule a_n em função de n.

Problema 3. (Romênia TST) Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$, $n \geq 1$. Prove que para todo $n \geq 0$, $2a_n - 1$ é um quadrado perfeito.

Problema 4. (Ibero) Seja (a_n) e (b_n) duas sequências de números inteiros que verificam as seguinte condições:
(i) $a_0 = 0$; $b_0 = 8$
(ii) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$; $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$
(iii) $a_n^2 + b_n^2$ é um quadrado perfeito para todo n.
Determinar pelo menos dois valores do par (a_{1992}, b_{1992}).

3. Recorrências não - lineares

Problema 5. A sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é tal que $x_1 = 0$ e

$$x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$$

para todo $n \geq 1$. Prove que todos os termos da sequência são inteiros positivos.

Solução. É fácil ver que a sequência é crescente e todos os termos são positivos. Temos também que a recorrência original é equivalente a

$$x_{n+1}^2 - 10x_nx_{n+1} + x_n^2 - 1 = 0.$$

Substituindo n por $n-1$ temos

$$x_n^2 - 10x_nx_{n-1} + x_{n-1}^2 - 1 = 0.$$

Então, para $n \geq 2$, os números x_{n+1} e x_{n-1} são raízes positivas e distintas da equação

$$x^2 - 10xx_n + x_n^2 - 1 = 0.$$

Usando as relações de Girard temos que

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 10x_n \Leftrightarrow$$

$$x_{n+1} = 10x_n - x_{n-1}, \ \forall n \geq 2.$$

Como $x_1 = 1$ e $x_2 = 10$, segue indutivamente que os termos da sequência são inteiros e positivos.

Problema 6. Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 199$ e

$$a_{n+1} = \frac{1989 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}},\ \forall n \geq 3.$$

Prove que todos os termos da sequência são inteiros e positivos.

Problema 7. (Torneio das cidades) A sequência x_n está definida pelas seguintes condições:

$$x_1 = 19,\ x_2 = 97,\ x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Demonstrar que existe um termo desta sequência que é igual a 0. Determinar o índice desse termo.

Problema 8. (China) Seja (a_n) uma sequência tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $\dfrac{a_{n+2}}{a_n} = \dfrac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n^2 + 1}$ para todo $n \geq 1$.
(a) Determine a_n em função de n.
(b) Prove que $63 < a_{2008} < 78$.

Bibliografia

1. Lecture notes on mathematical olympiad courses - For senior section vol.2
Xu Jiagu

2. Mathematical Olympiad Treasures
Titu Andreescu e Bogdan Enescu

3. Tópicos de matemática elementar vol.4
Antonio Caminha Muniz Neto

4. Introdução à análise combinatória
José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello e Idani T. C. Murari