Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 1

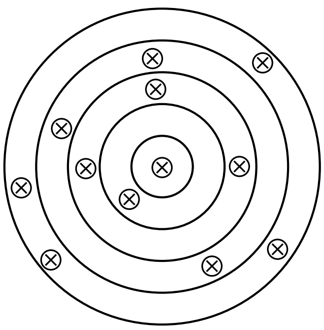
Lógica

Nos últimos anos, a participação brasileira em competições internacionais de matemática vem melhorado significamente. E uma das consequências do sucesso de nossos alunos é o crescimento da demanda de interessados em aprender mais sobre o que é a olimpíada e que tipo de problemas são abordados em suas competições.

O grande diferencial de problemas de olimpíada de matemática para os problemas usuais, são seu alto nível de exigência do uso raciocínio lógico. Portanto, em muitos casos, a matemática aparece como uma ferramenta para desenvolver a argumentação de ideias abstratas.

Este é o primeiro de dois artigos escritos com o objetivo de apresentar tais problemas, mesmo sem desenvolver uma teoria matemática propriamente dita. Vamos nos focar diretamente nas **ideias**.

Problema 1. Quatro garotos jogam tiro ao alvo. Cada um deles atirou três vezes. No alvo abaixo, pode-se ver os lugares atingidos. A pontuação é 6 para o centro e diminui um ponto para cada nível mais distante.



Se os quatro garotos empataram, determine:

(a) a pontuação total de cada jogador.

(b) a pontuação dos três tiros de cada jogador.

Solução. A soma de todos os pontos obtidos foi $6+5+4\times3+3\times3+2\times4 = 40$. Como todos empataram, cada um deve ter feito exatamente 10 pontos (isso responde o item a). Além disso é importante perceber que ninguém errou nenhum dos tiros, já que há exatamente 12 dardos no alvo.

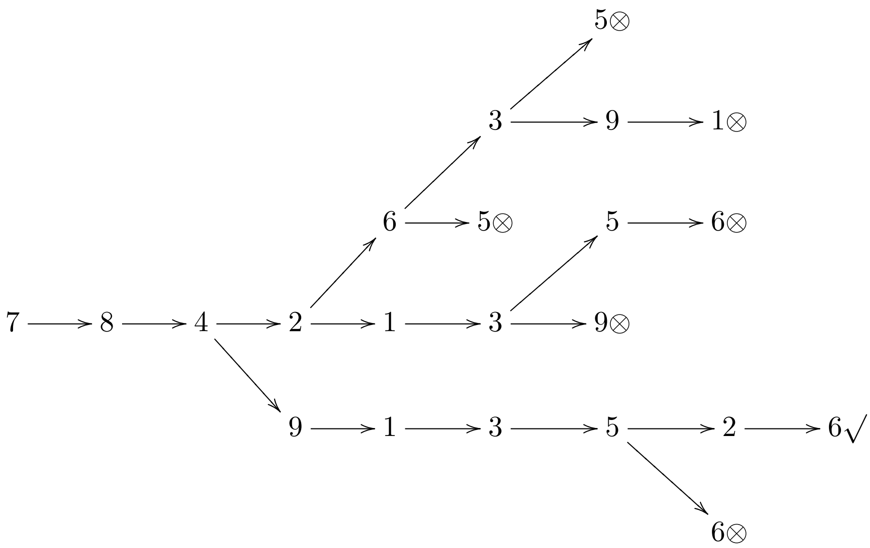
Note que um dos jogadores (digamos A) acertou um dos dardos no centro do alvo, fazendo 6 pontos. Para completar os 10 pontos ele deve ter feito mais 4 pontos. Como é impossível fazer apenas 1 ponto, ou dele ter errado, só nos resta a possibilidade dele ter feito 2 pontos nos dois outros tiros. (Continue a solução)

O objetivo de outro tipo de problema é achar um exemplo que cumpra alguma propriedade.

Problema 2. (OBM 1998) Encotre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em seqüência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis por 7 ou por 13.

Solução. Primeiramente vamos listar todos os números de dois algarismos que são múltiplos de 7 ou 13. São eles:
Múltiplos de 7: $14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98$
Múltiplos de 13: $13, 26, 39, 52, 65, 78, 91$

Como não podemos repetir nenhum algarismo, devemos descartar o 77. Por outro lado, nenhum dos números acima (excluindo o 77) termina em 7. Daí, pode-se ter certeza que o primeiro número da lista deve ser 7. Para saber as possíveis listas, usamos um diagrama de árvore:



Representamos com um $\otimes$ quando não foi possível continuar a lista sem repetir nenhum dígito. Assim, o modo correto de se escrever os algarismo é: 784913526.

Em alguns casos é necessário o uso de variáveis para resolver um problema. Isto acontece pois existem informações não especificadas no enunciado, e o uso de letras se mostra uma forma inteligente e fácil de trabalhar com valores desconhecidos. A seguir vamos resolver um problema que apareceu em uma olimpíada russa de 1995.

Problema 3. (Rússia 1995) Um trêm deixa Moscou às x horas e y minutos, chegando em Saratov às y horas e z minutos. O tempo da viagem foi de z horas e x minutos. Ache todos os possíveis valores para x.

Solução. Das condições do problema, temos que:

$$(60y + z) - (60x + y) = 60z + x$$

$$\Rightarrow 60(y - x - z) = x + y - z.$$

Com isso, podemos garantir que $x + y - z$ é um múltiplo de 60. Por outro lado, como $0 \leq x, y, z \leq 23$, o único valor possível para $x + y - z$ é 0. Ou seja, $x + y = z$. Além disso, na equação inicial temos que $60(y - x - z) = 0$. Daí, $y = x + z$. Logo, o único valor de x que garante essas igualdades é $x = 0$.

É importante perceber que no exemplo anterior que apenas o uso de letras não seria o suficiente para resolver o problema. O fundamental para resolver as equações acima era o significado das letras: números inteiros entre 0 e 60. Sem esta restrição o problema apresentaria infinitas soluções. Então fica a dica: nunca se **esqueça do signigficado das variáveis que estiver usando**, se são dígitos, números inteiros, racionais ou seja qual for a propriedade. Lembre-se que esta propriedade terá papel importante na solução do problema.

Organizar as informações também é útil na maioria dos problemas, como veremos no exemplo a seguir.

Problema 4. Paulo possui 13 caixas vermelhas e cada uma delas está vazia ou contém 7 caixas azuis. Cada caixa azul está vazia ou contém 7 caixas verdes. Se ele possui 145 caixas vazias, quantas caixas ele possui no total?

Solução. Vamos montar uma tabela que ajudará na solução do problema

	Vermelhas	Azuis	Verdes
Cheias	x	y	0
Vazias	$13 - x$	$7x - y$	$7y$
Total	13	$7x$	$7y$

Suponha que o número de caixas vermelhas cheias seja x e que o número de caixas azuis cheias seja y. Portanto, temos $7x$ caixas azuis e $7y$ caixas verdes. Note também que todas as caixas verdes estão vazias. Dessa forma, o total de caixas vazias é $(13-x)+(7x-y)+7y = 145$. Assim, podemos concluir que $x+y = 22$. Como o número total de caixas é $13+7(x+y)$, a resposta correta será $13 + 7 \times 22 = 167$.

Problemas Propostos

Problema 5. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. Samila, a irmã de Samuel, possui o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos (homens e mulheres) possui o pai de Samuel e Samila?

Problema 6. Em um hotel para cães e gatos, 10% dos cães acham que são gatos e 10% dos gatos acham que são cães. Verificou-se também que 20% dos animais acham que são gatos. Se no hotel existem 10 gatos, quantos são os cães?

Problema 7. É possível cortar um tabuleiro 39×55 em vários retângulos 5×11?

Problema 8. No fim de 1994, Neto tinha metade da idade de seu avô. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completou em 2006?

Problema 9. Um professor propõe 80 problemas a um aluno, informando que ele ganha 5 pontos ao acertar cada problema corretamente e perde 3 pontos caso não resolva o problema. No final, o aluno tinha 8 pontos. Quantos problemas ele resolveu corretamente?

Problema 10. (Leningrado 1987) Na ilha de Anchúria existem quatro tipos de notas: 1$, 10$, 100$ e 1000$. Podemos obter 1$ milhão com exatamente 500.000 notas?

Problema 11. Você tem uma lista de números reais, cuja soma é 40. Se você trocar todo número x da lista por $1-x$, a soma dos novos números será 20. Agora, se você trocar todo número x por $1+x$, qual será o valor da soma?

Problema 12. (Eslovênia 1992) Complete a tabela abaixo de modo que:

i. A soma de quaisquer três vizinhos seja a mesma.

ii. A soma total dos números seja 171.

			15				13					

Problema 13. Trabalhando juntos Alvo e Ivo, pintam uma casa em três dias; Ivo e Eva pintam a mesma casa em quatro dias; Alvo e Eva em seis dias. Se os três trabalharem juntos, quantos em quantos dias pintarão a casa?

Problema 14. (Rioplatense 1997) Em cada casa de um tabuleiro 4×4 é colocado um número secreto. Sabe-se que a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é 1. Com essa informação é possível determinar a soma dos números escritos nos quatro cantos? E a soma dos quatro números escritos no centro? Se for, quais são essas somas?

Dicas e Soluções

6. Construa uma tabela, tente usar apenas uma variável!

7. Não. Demonstre que não é possível cobrir um dos lados do tabuleiro.

10. Sejam x, y, z e w as quantidades de notas. Monte um sistema com duas equações e use o fato de 500.000 não ser múltiplo de 9.

13. Use o fato de Alvo e Ivo pintarem um terço da casa em um dia.

14. Separe o tabuleiro em três regiões. Não se preocupe com os números, mas com a soma dos números nestas regiões espertas.