Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

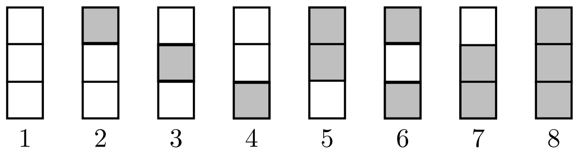
Aula 8

Princípio da Casa dos Pombos II

Nesta aula vamos continuar praticando as ideias da aula anterior, aplicando o princípio da casa dos pontos em problemas mais sofisticados e em alguns tipos de problemas que chamaremos de problemas de coloração.

Problema 1. Cada casa de um tabuleiro 3×7 é pintado de preto ou branco. Mostre que é possível achar um retângulo (com lados paralelos aos do tabuleiro) cujas quatro pontos são da mesma cor.

Solução. Cada coluna deste tabuleiro pode ser pintado de uma das seguintes formas:



Observe que se a pintura 1 for escolhida, bastaria uma coluna do tipo 2, 3 ou 4 para formar um retângulo. Com isso, nos restariam apenas mais quatro outras pinturas porém, temos sete colunas. Daí, pelo principio da casa dos pombos teríamos duas colunas iguais. O mesmo ocorre com a coluna do tipo 8.

Agora suponha que nenhuma das colunas for do tipo 1 ou 8. Dessa forma, restaria apenas 6 tipos de pinturas. Assim, pelo princípio da casas dos pombos, duas delas seriam iguais. □

Problema 2. (Belarus 2007 - adaptado) Os pontos de um plano são pointados usando três cores. Prove que existe um triângulo isósceles monocromático.

Solução. Suponha que exista uma forma de pintar o plano de forma que não exista um triângulo isóceles monocromático. Assuma que as cores sejam verde, azul e vermelho. Construa um suponha sem perda de generalidade que o seu centro O seja verde. Dessa forma, pode haver no máximo um único ponto verde dentre os pontos dos círculo. Assim é possível construir um pentágono regular $A_1A_2A_3A_4A_5$ cujos vértices são todos azuis ou vermelhos.

Daí, pelo princípio da casa dos pombos, existirão três vértices do pentágono que serão da mesma cor. E como quaisquer três vértices de um pentágono regular formam um triângulo isósceles, existirá um triângulo isósceles monocromático. □

Problema 3. (Leningrado) Considere 70 inteiros positivos distintos menores ou iguais a 200. Prove que existem dois deles cuja diferença é 4, 5 ou 9.

Solução. Sejam $a_1, a_2, ..., a_{70}$ esses inteiros positivos. Considere as seguintes listas:

$$\{a_1, a_2, ..., a_{70}\};$$

$$\{a_1 + 4, a_2 + 4, ..., a_{70} + 4\};$$

$$\{a_1 + 9, a_2 + 9, ..., a_{70} + 9\}.$$

Temos um total de 210 números que estão compreendidos entre 1 e 209 (inclusive). Portanto, pelo princípio da casa dos pombos, existirão dois iguais. Como números na mesma lista são sempre diferentes, será possível encontrar dois números em listas diferentes que são iguais. Estes dois números irão satisfazer à condição do problema. □

Problema 4. (Torneio das Cidades 1998) Em um tabuleiro 8×8, 17 casas são marcadas. Prove que é possível escolher duas dessas casas marcadas de modo que um cavalo de xadrez leve pelo menos três movimentos para ir de uma a outra.

Solução. Pinte as casas do tabuleiro usando 16 cores conforme a figura a seguir.

10	12	14	16	2	4	6	8
10	12	14	16	2	4	6	8
9	11	13	15	1	3	5	7
9	11	13	15	1	3	5	7
2	4	6	8	10	12	14	16
2	4	6	8	10	12	14	16
1	3	5	7	9	11	13	15
1	3	5	7	9	11	13	15

Observe que para se deslocar entre duas casas de mesma cor o cavalo necessita de pelo menos três movimentos. Portanto, pelo princípio da casa dos pontos, dentre 17 casas marcadas, sempre haverá pelo menos duas da mesma cor. □

Problema 5. (Teste Cone Sul) Os inteiros $1, 2, \ldots, 200$ são divididos em 50 conjuntos. Mostre que pelo menos um desses 50 conjuntos contém três números distintos que podem ser medidas dos lados de um mesmo triângulo.

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, dentre os 101 inteiros $100, 101, \ldots, 200$, pelo menos três deles estão em um mesmo conjunto. Sendo $a < b < c$ tais inteiros, temos

$$a + b \geq 100 + 101 = 201 > 200 \geq c \Rightarrow a + b > c,$$

e portanto a, b, c podem ser medidas dos lados de um mesmo triângulo. $\square$

Problemas Propostos

Problema 6. Mostre que para todo $n > 1$ de qualquer subconjunto de $n + 2$ elementos do conjunto $1, 2, ..., 3n$ podemos escolher dois cuja a diferença é maior que n e menor que $2n$.

Problema 7. Em uma sapataria existem 200 botas de tamanho 41, 200 botas de tamanho 42, e 200 botas de tamanho 43. Dessas 600 botas, 300 são para o pé esquerdo e 300 para o direito. Prove que existem pelo menos 100 pares de botas usáveis.

Problema 8. Onze estudantes formaram cinco grupos de estudo. Prove que existem dois alunos A e B, tais que em todo grupo que inclui A também inclui B.

Problema 9. Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então um deles será múltiplo de outro. Isso pode ser evitado com n números?

Problema 10. (Torneio das Cidades 1994) Existem 20 alunos em uma escola. Quaisquer dois deles possui um avó em comum. Prove que pelo menos 14 deles possui um avó em comum.

Problema 11. (Rússia 1997) Uma sala de aula possui 33 alunos. Cada aluno tem uma música e um cantor favorito. Certo dia, cada um deles perguntou aos demais suas músicas e catores favoritos. Em seguida, cada um falou dois números, o primeiro era a quantidades de alunos que gostavam da mesma música e o segundo, a quantidade de alunos que tinham o mesmo cantor favorito. Sabe-se que cada um dos números de 0 a 10 apareceu entre as respostas. Mostre que existem dois alunos que gostam do mesmo cantor e da mesma música.

Problema 12. Suponha que para algum inteiro $k \geq 1$ a soma de $2k + 1$ inteiros positivos distintos é menor que $(k + 1)(3k + 1)$. Mostre que existem dois deles cuja soma é $2k + 1$.

Problema 13. Existe algum conjunto A formado por sete inteiros positivos, nenhum dos quais maior que 24, tal que as somas dos elementos de cada um dos seus 127 subconjuntos não-vazios sejam distintas duas a duas?

Problema 14. (USAMO 1985) Em uma festa há n pessoas. Prove que existem duas pessoas tais que, das $n-2$ pessoas restantes é possível achar $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ onde cada uma delas conhece ou não conhecem ambas.

Problema 15. O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 16. (Putnam) O plano é pintado usando três cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 17. O plano é totalmente pintado usando duas cores. Prove que existe um retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.

Problema 18. (IMO 1983) Cada ponto do perímetro de um triângulo eqüilátero é pintado de uma de duas cores. Mostre que é possível escolher três pontos da mesma cor formando um triângulo retângulo.

Problema 19. Nove pontos de um icoságono regular são pintados de vermelho. Prove que podemos encontrar três deles formando um triângulo isósceles.

Problema 20. (Rússia 2004) Cada ponto de coordenadas inteiras é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.

Problema 21. O plano é pintado usando três cores. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo isósceles com os três vértices da mesma cor.

Dicas e Soluções

9. Dado um inteiro positivo m, podemos escrevê-lo de modo único na forma $m = 2^a b$, em que $a \geq 0$ e b é ímpar. Chamaremos b de parte ímpar do número m.

   No conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ só podem existir n possíveis partes ímpares, a saber: $1, 3, \ldots, 2n-1$. Se escolhermos mais do que n números, pelo princípio da casa dos pombos, existem dois números m e n que têm a mesma parte ímpar, ou seja, $a = 2^r b$ e $c = 2^s b$. Mas então, supondo sem perda de generalidade que $r \leq s$, concluímos que $a|c$.

   O resultado pode ser evitado com exatamente n números. Um exemplo é escolhermos os números $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

13. Não. Por absurdo, suponha $A = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_7\}$ satisfazendo a condição do enunciado. Note que

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_7 < 24 + 23 + 22 + 20 + 19 + 18 + x_1 = 126 + x_1.$$

   De fato, $24, 23, 22, 21$ não podem estar simultaneamente em A (pois $24+21 = 23+22$), bem como $24, 23, 19, 18$ também não (pois $24 + 18 = 19 + 23$). Como a soma mínima dos elementos de um subconjunto é x_1 e a soma máxima é menor que $126+x_1$, existem no máximo 126 valores para a soma dos elementos de cada subconjunto. O Princípio da Casa dos Pombos garante portanto que existem dois subconjuntos não-vazios de A com a mesma soma, absurdo.