Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

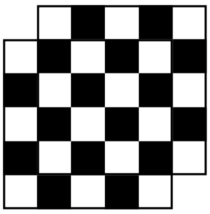
Prof. Bruno Holanda

Aula 9

# Tabuleiros

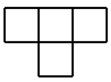
Quem nunca brincou de quebra-cabeça? Temos várias "pecinhas" e temos que encontrar uma maneira de unir todas elas para formar uma figura maior. O que costumava ser apenas um passa-tempo, ganhou uma irmã que estudada por muitos matemáticos sérios pelo mundo a *"Tiling Theory"* (traduzindo: Teoria da Cobertura). E por se tratar de um tema muito atrativo, logo ganhou força nas principais competições de matemática.

**Problema 1.** Determine se é possível cobrir ou não o tabuleiro abaixo (sem sobreposições) usando apenas dominós?



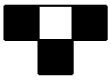
**Solução.** Pinte as casas do tabuleiro acima alternadamente de branco e preto (como no tabuleiro de xadrez). Note que, não importa como colocamos o dominó no tabuleiro, ele sempre cobre uma casa branca e ou outra preta. Desse modo se fosse possível cobrir o tabuleiro usando apenas dominós, deveríamos ter o tabuleiro com a quantidade de casas pretas igual a quantidade de casas brancas. Mas no tabuleiro "quebrado" existem 18 casas brancas e 16 pretas. Logo, não é possível fazer tal cobertura. □

**Problema 2.** Podemos cobrir um tabuleiro $10 \times 10$ usando apenas T-tetraminós como abaixo?

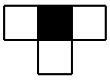


**Solução.** Pinte o tabuleiro de branco e preto da maneira usual (como no xadrez). Note que ao colocarmos um T-tetraminó no tabuleiro ele pode assumir colorações do tipo 1 ou 2.

Suponha que ao cobrir o tabuleiro usamos $A$ peças do tipo 1 e $B$ do tipo 2. Sabemos que devemos usar 25 peças no total ou seja $A + B = 25$. Cada peça do tipo 1 possui uma casa branca e cada peça do tipo 2 possui 3 casas brancas, e como temos ao todo 50 casas brancas no tabuleiro; $A + 3B = 50$. De modo análogo, obtemos $B + 3A = 50$. Porém o sistema acima não possui solução inteira. Logo, não é possível cobrir o tabuleiro. $\square$



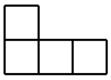
Tipo 1



Tipo 2

E não é apenas a pintura do xadrez que é útil para resolver problemas. Vejamos o próximo exemplo.

**Problema 3.** Para que valores de $n, m$ podemos cobrir um tabuleiro $n \times m$ usando apenas $L$-tetraminós como abaixo?



**Solução.** Claramente $n \cdot m$ deve ser múltiplo de 4. Nesse caso, $n$ ou $m$ (possivelmente ambos) deve ser múltiplo de dois. Suponha sem perca de generalidade que $m$ (i.e., o número de colunas) é par. Pinte altenadamente as colunas de duas cores como mostrado na figura a seguir. Para finalizar, adapte a solução do problema anterior. $\square$

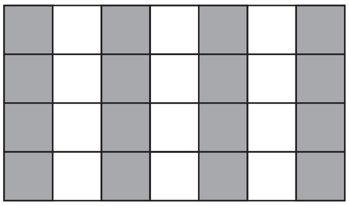


Figura 1: Pintura por Colunas

Se duas cores ajudam muita gente, quatro cores ajudam muito mais! É isso mesmo! Não vá pensando que é só pintar o tabuleiro de preto e branco que você vai resolver todos os problemas de tabuleiro do mundo! O próximo exemplo mostra que às vezes apenas duas cores não bastam.

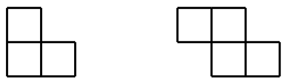
**Problema 4.** É possível que um cavalo do xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro $4 \times 10$ exatamente uma vez e, em seguida retorne para o quadrado original?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | |
| | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | |
| | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | |
| | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | |

**Solução.** Pinte o tabuleiro $4 \times n$ como mostra a figura acima. Assuma que seja possível fazer que o cavalo passe por todas as casas. Note que, se o cavalo está na casa 1 só poderá ir para casa 3 desse modo para o cavalo ir para uma casa de cor 1 ele passa por duas casas de cor 3, e como cada cor possui o mesmo número de casas, fica impossível o cavalo fazer o passeio. $\square$

Vimos que pintar tabuleiros usando cores é uma exelente idéia. Uma idéia melhor ainda é pintar usando números! Você deve estar se perguntando por que? Bem, os números possui propriedades aritméticas (i.e, podem ser somados e multiplicados), coisa que não podemos fazer com cores. A não ser que você ache que preto+branco=cinza.

**Problema 5.** (Estônia 1993) Para quais naturais $n$ é posível cobrir um retângulo de tamanho $3 \times n$ com peças mostradas na figura abaixo sem sobreposição?



**Solução.** Pinte o tabuleiro da seguinte forma:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

Veja que a soma dos números cobertos por um *L-trinimó* é sempre 1 ou $-1$. Enquanto a soma dos números cobertos por um *Z-tetraminó* é sempre zero. Além disso, a soma de todos os números do tabuleiro é $n$. Observe que para cobrir um tabuleiro $3 \times n$ podemos usar no máximo $n$ peças. Assim, todas as peças devem ser $L$-triminós. Além disso, não podemos dispor nenhum $L$-triminó de modo que a soma dos números escritos em suas casas seja $-1$. Dessa forma, se pintarmos o tabuleiro como no xadrez, cada $L$-triminó terá que ocupar duas casas pretas. Portanto, $n$ deve ser um número par. $\square$

## Problemas Propostos

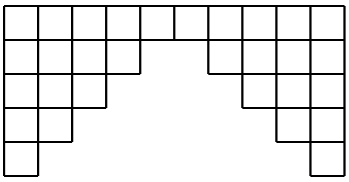
**Problema 6.** Ache o menor ladode um tabuleiro quadrado que pode ser montado usando um mesmo número de peças de cada um dos tipos abaixo.

**Problema 7.** Sobre uma das casas de um tabuleiro infinito, existe um cubo que cobre a casa perfeitamente. A face no topo do cubo é branca, enquanto as demais faces são pretas. A cada passo, podemos tombar o cubo para um dos lados. É possível que:

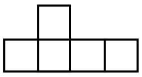
(a) Após 2004 passos o cubo volte ao mesmo quadrado com a face branca para baixo?

(b) Após 2005 passos?

**Problema 8.** É possível cobrir o tabuleiro a seguir usando apenas dominós?



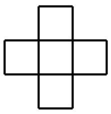
**Problema 9.** É possível cobrir um tabuleiro $5 \times 10$ usando apenas peças como abaixo?



**Problema 10.** Queremos cobrir um tabuleiro $7 \times 7$ usando várias peças de dois tipos:


Diga como cobrir o tabuleiro usando o menor número possível de peças do tipo 1.

**Problema 11.** (Rússia 1997) Podemos cobrir um tabuleiro $75 \times 75$ usando dominós e cruzes (como na figura a seguir)?



cruz

**Problema 12.** (Rioplatense 1999) É possível cobrir um tabuleiro $1999 \times 1999$ com quadrados de lados inteiros maiores que 35 e menores que 1999?
*PS:* Os quadrados podem ser de tamanhos distintos.

**Problema 13.** (Rússia 2007) As faces de um cubo $9 \times 9 \times 9$ são particionas em quadradinhos da forma usual. Sua superfície é coberta por 243 tiras de papel $2 \times 1$ sem sobreposição. Uma tira é dita *dobrada* se não está apenas sobre uma face.
Prove que o número de tiras dobradas é ímpar.

**Problema 14.** Podemos cobrir uma caixa $10 \times 10 \times 10$ com 250 caixas $1 \times 1 \times 4$?

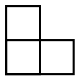
**Problema 15.** Um tabuleiro $n \times m$ foi totalmente coberto usando peças $4 \times 1$ e $2 \times 2$. Em seguida, todas as peças foram retiradas do tabuleiro e uma peça $2 \times 2$ foi substituída por uma peça $4 \times 1$. Prove que o tabuleiro não poderá ser mais coberto com essa troca.

**Problema 16.** De um tabuleiro $n \times n$ são retiradas suas quatro casas do quanto. Quais são os valores de $n$ para os quais esse tabuleiro quebrado é coberto por L-tetraminós?

**Problema 17.** Sejam $m$ e $n$ inteiros maiores que 1. Se um tabuleiro $m \times n$ pode ser coberto com L-tetraminós então é $mn$ é múltiplo de 8.

**Problema 18.** (Teorema de Klarner) Um tabuleiro $a \times b$ pode ser coberto usando apenas peças $1 \times n$ se e somente se $n \mid a$ ou $n \mid b$.

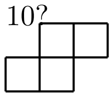
**Problema 19.** (Romênia 2000) Determine todos os tabuleiros $m \times n$ que podem ser cobertos usando L-triminós como abaixo:



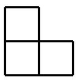
**Problema 20.** Um tabuleiro $7 \times 7$ é coberto usando 16 peças $3 \times 1$ e um monominó. Determine todas as posições possíveis do monominó.

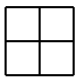
**Problema 21.** (Estônia 2004) Um tabuleiro $5 \times 5$ é coberto por oito *t-triminós* e um *monominó*. Determine todas as possíveis possições que o monominó pode ocupar.

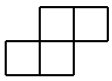
**Problema 22.** Qual o número máximo de S-tetraminós como o abaixo podem ser colocados, sem sobreposições em um tabuleiro $10 \times 10$?



Um tabuleiro $7 \times 7$ é coberto usando peças do seguinte tipo:


(1)

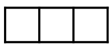

(2)

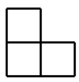

(3)

Prove que uma e apenas uma peça com quatro casas é usada.

**Problema 23.** (Bielorussia 1999) Temos um tabuleiro $7 \times 7$ e peças dos três tipos a seguir:


(1)


(2)

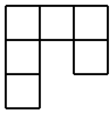

(3)

Samuel possui infinitas peças do tipo 2 e uma peça do tipo 3, enquanto Marcelo possui apenas uma peça do tipo 1.

a) Prove que Marcelo pode colocar sua peça em algum lugar do tabuleiro de modo que Samuel não consiga completar o resto do tabuleiro usando suas peças.

b) Suponha que Samuel adquiriu outra peça do tipo 3. Prove que não importa o lugar no qual Marcelo coloque sua peça, Samuel sempre poderá completar o tabuleiro.

**Problema 24.** (IMO 2004) Um *gancho* é uma figura de seis casas como na figura acima ou qualquer uma das figuras obtidas desta aplicando rotações ou reflexões. Determine todos os tabuleiros $m \times n$ que podem ser cobertos usando esses ganchos.

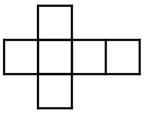


gancho

**Problema 25.** (Putnam 1991) Existe algum natural $L$, tal que se $m$ e $n$ são inteiros maiores que $L$, então todo tabuleiro $m \times n$ pode ser coberto usando peças $4 \times 6$ e $5 \times 7$?

**Problema 26.** (Bielorussia 2000) Ache o maior número de *cruzes* que podem cobir um tabuleiro $8 \times 8$.

**Problema 27.** (Bielorussia 2000) Ache o maior número *T-hexaminós* (como na figura abaixo) que podem cobir um tabuleiro $9 \times 9$.



**Problema 28.** (Estônia 2004) Ache a medida do lado do menor cubo que pode ser coberto por *crymbles* (figura 2).

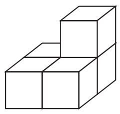


Figura 2: Crymble

**Problema 29.** (Rússia 1996) Podemos cobrir um tabuleiro $5 \times 7$ com *L-triminós* que tal forma que cada casa do tabuleiro seja coberta por um mesmo número de peças? (pp **??**)

**Problema 30.** Suponha que 99 peças do tipo $2 \times 2$ são colocadas em um tabuleiro $29 \times 29$. Mostre que uma outra peça ainda pode ser colocada.

**Problema 31.** Determine se a última peça do resta um pode terminar na casa indicada (figura 3)

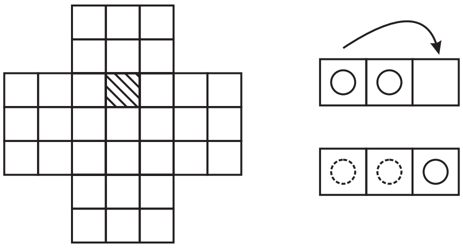


Figura 3: Resta Um.

## Dicas e Soluções

7. (a) Sim. Vire o cubo duas vezes para a direita, uma para baixo, duas para a esquerda e uma para cima (figura 4). Após estes seis passos, a face branca estará virada para baixo. Depois basta repetidamente o cudo para direira e para esquerda 996 vezes.

   (b) Não. Pinte o tabuleiro na maneira usual. Note que, a cada movimento, o cubo muda de uma casa preta para uma casa branca e vice-versa. Logo, após um número ímpar de movimentos não poderá estar na casa inicial.

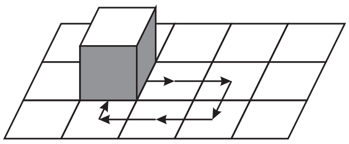


Figura 4: Virando um Cubo.

9. Sim veja a figura 5.

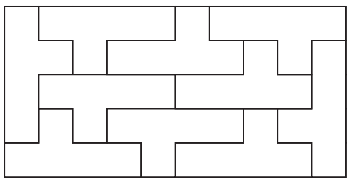


Figura 5: Cobrindo com Y-pentaminós.

**Nota.** Com um pouco mais de trabalho podemos provar que o "menor" tabuleiro (em número de casas) que podemos cobrir usando apenas Y-pentaminós é o $5 \times 10$. Note que para cobrí-lo usamos 10 peças. Dessa forma, dizemos que o Y-pentaminó tem ordem 10. Veja que alguns polinimós já são um tabuleiro, como acontece com o monominó e o dominó. Esse tipo de peça tem ordem 1 ou trivial. Algumas peças (como o Z-tetraminó) possuem ordem infinita, já que não existe nenhum tabuleiro $n \times m$ que possa ser inteiramente coberto usando somente elas.

15. Pinte tabuleiro da seguinte forma:
    1) As linhas pares devem ser pintadas como no xadrez, alternando preto e branco.
    2) As linhas ímpares devem ser pintadas totalmente de branco.

18. Pinte como no xadrez, porém use $n$ cores!

28. **Dica:** Use a pintura como mostra a figura 6 para mostrar que o cubo de lado 5 não pode ser coberto.

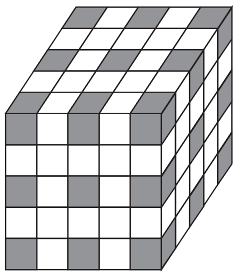


Figura 6:

29. Pinte o tabuleiro usando $-2$'s e 1's como mostrado na figura a seguir. Cada T-triminó ocupa três casas cuja a soma é 3 ou 0. Por outro lado a soma de todas casas do tabuleiro é $-1$. Logo, é impossível cobrir já que a soma não é um múltiplo positivo de 3.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| –2 | 1 | –2 | 1 | –2 | 1 | –2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| –2 | 1 | –2 | 1 | –2 | 1 | –2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| –2 | 1 | –2 | 1 | –2 | 1 | –2 |

Figura 7:

31. Use a pintura alternada do xadrez usando três cores.