Invariantes

Nesta aula vamos estudar o princípio da invariância. Ou seja, vamos resolver problemas que, dada uma transformação, existe uma propriedade associada que nunca muda. Por exemplo, se somarmos dois a um certo natural, sua paridade é invariante.

Problema 1. Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?

Solução. Quando escolhemos quatro moedas par virar, sempre iremos nos deparar com uma das seguintes possibilidades:

- Todas as moedas são cara;
- Temos três moedas cara e uma coroa;
- Temos duas caras e duas coroas;
- Temos uma cara e três coroas;
- Todas as moedas são coroas.

Na primeira possibilidade, ao virar as quatro moedas, passamos a ter quatro coroas a mais na configuração. Na segunda possibilidade, passamos a ter duas coroas a mais. Na terceira, a quantidade de coroas não se altera. Na quarta, perdemos duas coroas. E na quinta, perdemos quatro.

Ou seja, se temos em um dado momento, K coroas na configuração, após aplicarmos a transformação permitida, termos $K + 2q$ coroas. Onde $q \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Portanto, a quantidade de coroas (que é inicialmente zero) sempre será par. Logo, é impossível obter todas as moedas coroas através de um número finito de operações. Neste caso, a paridade da quantidade de moedas coroas é **invariante**. □

Problema 2. Em cada um dos dez degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, dando um pulo, ir para outro degrau. Porém, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas no mesmo degrau? Justifique.

Solução. Vamos dizer que uma rã tem energia i se ela estiver no *i-ésimo* degrau. Por exemplo, uma rã que está no terceiro degrau tem energia 3. Se ela pular para o sétimo degrau passará a ter energia 7. Dessa forma, observe que a soma das energias de todas as rãs é **invariante**. Ou seja, é sempre $1 + 2 + \cdots 10 = 55$. Portanto, se em algum momento todas estiverem no mesmo degrau x, todas também terão energia x, ou seja $10x = 55$. E como $x \in \mathbb{N}$, concluímos que é impossível todas ficarem no mesmo degrau. □

Problema 3. Cada um dos números $a_1, a_2, ..., a_n$ é 1 ou -1, e temos que:

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Prove que $4 \mid n$.

Esse problema parece muito mais com um problema de teoria dos números do que um problema de invariância. Na realidade, como isso pode ser um problema de invariância se, não temos nenhuma transformação? Não seja por isso! Podemos criar nossas próprias transformações!

Solução. Nosso movimento será o seguinte: "trocar a_i por $-a_i$". Fazendo essa operação, a congruência de S módulo 4 é invariante pois, trocam de sinal exatamente quatro parcelas de S. Assim, basta trocar todos os a_i's que forem -1 por 1. Portanto $0 \equiv S \equiv 1+1+\cdots+1 \equiv n \pmod 4 \Rightarrow 4 \mid n$. □

Problema 4. Dado um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$ pode mos fazer as seguintes operações:
a. Trocar a com c.
b. Tocar x por $x + t$ onde t é um real.
Usando essas operações é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

Solução. Vamos demonstrar que o "delta" é invariante. Observe que os polinômios $ax^2 + bx + c$ e $cx^2 + bx + a$ possuem o mesmo delta $\Delta = b^2 - 4ac$. Além disso, dado t real, podemos simplificar:

$$a(x + t)^2 + b(x + t) + c = a(x^2 + 2tx + t^2) + b(x + t) + c = ax^2 + (2ta + b) + (at^2 + bt + c).$$

O delta desse último polinômio é:

$$\Delta' = (2ta + b)^2 - 4a(at^2 + bt + c) = b^2 - 4ac.$$

Note que a maioria dos problemas de invariância têm o enunciado muito parecido. Todos eles de alguma forma perguntam se, dado uma configuração é possível chegar em outra. E como você também deve ter visto, a maioria das respostas é sempre *não*. Cuidado! Existem problemas com o enunciado muito parecido mas, a resposta é afirmativa. Nestes casos, devemos mostrar como chegar na tão desejada configuração.

O próximo exemplo é da olimpíada do Leningrado de 1990. Esse exercício irá esclarecer a idéia de "falsa invariante".

Problema 5. O número 123 está na tela do computador de Teddy. A cada minuto o número escrito na tela é somado com 102. Teddy pode trocar a ordem dos dígitos do número escrito na tela quando ele quiser. Ele pode fazer com que o número escrito na tela seja sempre um número de três dígitos?

Solução. É possível, basta ele seguir a seqüência: $123 \to 225 \to 327 \to 429 \to 531 \Rightarrow 135 \to 237 \Rightarrow 327 \to 429 \cdots$, onde $\to$ denota a operação de computador e $\Rightarrow$ uma operação feita por Teddy. $\square$

Problemas Propostos

Problema 6. Os números $1, 2, 3, ..., 1989$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?

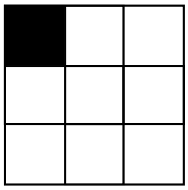
Problema 7. Os números $1, 2, ..., 20$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois deles a e b e escrever no lugar o número $a + b + ab$. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Qual deve ser esse número?

Problema 8. Começando com a tripla $\{3, 4, 12\}$ podemos a cada passo escolher dois número a e b e trocá-los por $0.6a - 0.8b$ e $0.8a + 0.6b$. Usando essa operação podemos obter $\{4, 6, 12\}$

Problema 9. (Torneio das Cidades) Existem dez moedas em linha reta. É possível virar quatro consecutivas ou escolher cinco consecutivas e virar quatro que estão na extremidade $(\times \times \bigcirc \times \times)$.

Problema 10. Em um tabuleiro 8×8 uma das casas está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

Problema 11. Em um tabuleiro 3×3 uma das casas do canto está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?



Problema 12. Em um tabuleiro 8×8 as quatro casas do canto estão pintadas de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

Problema 13. (Bulgária 2004) Considere todas as "palavras" formadas por a's e b's. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações: Trocar um bloco aba por um bloco b, trocar um bloco bba por um bloco a. Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a seqüência $b\underbrace{aa...a}_{2003}$ a partir de $\underbrace{aa...a}_{2003}b$?

Problema 14. (Fortaleza 2003) Sobre uma circunferência tomamos $m+n$ pontos, que a divide em $m+n$ pequenos arcos. Nós pintamos m pontos de branco e os n restantes de preto. Em seguida, associamos a cada um dos $m+n$ arcos um dos números $2, 1/2$ ou 1, dependendo se as extremidades do arco sejam, respectivamente, ambas brancas, ambas pretas ou uma preta e uma branca.
Calcule o produto dos números associados a cada um dos $m+n$ arcos.

Problema 15. (Cone Sul 2000) No plano cartesiano, considere os pontos de coordenadas inteiras. Uma operação consiste em escolher um destes pontos e realizar uma rotação de $90°$ no sentido anti-horário, com centro neste ponto. É possível, através de uma seqüência dessas operações, levar o triângulo de vértices (0,0);(1,0);(0,1) no triângulo de vértices (0,0);(1,0);(1,1)?

Problema 16. (Leningrado 1988) Uma pilha com 1001 pedras está sobre uma mesa. Um jogo consiste em escolher uma pilha sobre a mesa contendo mais de uma pedra, retirar uma pedra, e separar a pilha em duas pilhas não vazias (não necessariamente iguais). Após vários movimentos, é possível que todas as pilhas restantes contenham exatamente três pedras?

Problema 17. (Rússia 1995) Três pilhas de pedras estão sobre uma mesa. Sisyphus pode escolher duas pilhas e transferir uma pedra de uma pilha para a outra. Para cada transferência ele recebe de Zeus o número de moedas igual a diferença entre a quantidade de pedras da pilha de onde foi retirada a pedra e a quantidade de pedras da pilha que receberá a pedra (a pedra na mão de Sisyphus não é levada em conta). Se essa diferença for negativa, Sisyphus deve pagar a Zeus o número correspondente (o generoso Zeus permite que ele pague depois se entrar em falência). Após algum tempo todas as pilhas voltaram a ter a mesma quantidade inicial de pedras. Qual o número máximo de moedas que Sisyphus pode ter neste momento?