Invariantes com Restos

Problema 1. (Leningrado 1987) As moedas dos países Dillia e Dallia são o diller e o daller, respectivamente. Podemos trocas um diller por dez dallers e um daller por dez dillers. Zequinha possui um diller e deseja obter a mesma quantidade de dillers e dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?

Solução. Seja S a diferença entre a quantidade de dillers e dallers. Note que a congruência de S módulo 11 é invariante. Como inicialmente $S \equiv 1 \pmod{11}$, não se pode obter a mesma quantia de dillers e dallers. □

Problema 2. (Rússia 1998) Um inteiro positivo é escrito no quadro. Nós repetimos o processo: Apagar o dígito das unidades e soma 5 vezes este dígito com o número restante. Começando com 7^{1998} pordemos terminar em 1998^7?

Solução. Seja a_n o n-ésimo número da lista. Escrevemos esse número da seguinte forma $a_n = 10t_n + u_n$, em que u_n é um dígito e t_n representa os primeiros algarismos de a_n.

Pelas condições dadas no problema, devemos ter $a_{n+1} = t_n + 5u_n$. Agora, observe que

$$t_n + 5u_n \equiv 50t_n + 5u_n \equiv 5(10t_n + u_n) \equiv 5a_n \pmod{7}.$$

Como $a_1 = 7^{1998} \equiv 0 \pmod{7}$ e $1998^7 \not\equiv 0 \pmod{7}$, concluímos que é impossível que 1998^7 apareca na lista. □

Problema 3. (Rússia 2008) Um número natural é escrito no quadro-negro. Sempre que o número x está escrito, podemos trocá-lo por $2x+1$ ou por $\dfrac{x}{x+2}$. Em algum momento o número 2008 aparece na lista. Prove que 2008 deve ser o primeiro.

Solução. Seja $x = \dfrac{a}{b}$ um número racional escrito na sua forma reduzida. Defina a função $f(x) = a + b$. Observe que

1. Se $x' = 2x + 1$, então $x' = \dfrac{2a+b}{b}$. Como $\text{mdc}(2a + b, b) = \text{mdc}(2a, b)$ pelo lema de Euclides, então $f(x') = 2f(x)$ ou $f(x') = f(x)$.
2. Se $x' = \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{a}{a+2b}$. Como $\text{mdc}(2b + a, b) = \text{mdc}(2b, a)$ pelo lema de Euclides, então $f(x') \geq 2f(x)$ ou $f(x') = f(x)$.

Como $f(2008) = 2009$, ele deve ser o primeiro.

Semi-Invariantes

A idéia de *semi-invariante* é um pequena generalização da idéia de invariante. Diremos que uma propriedade é semi-invariante quando ela muda de forma previsível (periodicamente, sempre crescendo ou decrescendo). Um exemplo bastante comum de semi-invariante é a idade de uma pessoa, que sempre cresce de forma periódica (a cada 365 anos).

Problema 4. Nove casas 1×1 de um tabuleiro 10×10 estão infectadas. A cada segundo, uma casa que possui duas casas vizinhas (com um lado em comum) infectadas também se torna infectada. É possível todas as casas se tornarem infectadas?

Solução. Veja que uma casa pode ser infectada de várias formas. Primeiramente vamos analisar a seguinte "infecção":

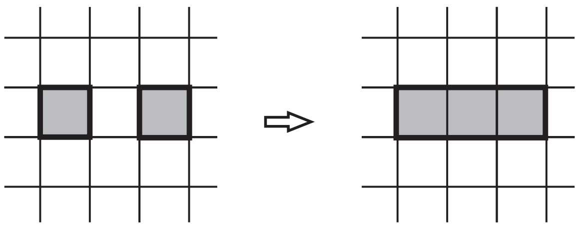


Figura 1: Infecção do Tipo 1.

Olhando para figura fica fácil observar que o perímetro total da área infectada não muda após a infecção do tipo 1. Desse modo, poderíamos pensar que esse perímetro é invariante e igual a $4 \times 9 = 36$. Daí, como o perímetro do tabuleiro todo é $4 \times 10 = 40$ seria impossível tornar o tabuleiro totalmente infectado. Mas neste caso, estaríamos cometendo um erro gravíssimo: *esquecer de analisar todos os casos.* Vejamos o que acontece nos demais casos:

Note que neste tipo de infecção o perímetro não permanece constante, e sim diminui em duas unidades! A princípio isso pode parecer um problema, mas não é. Se o perímetro

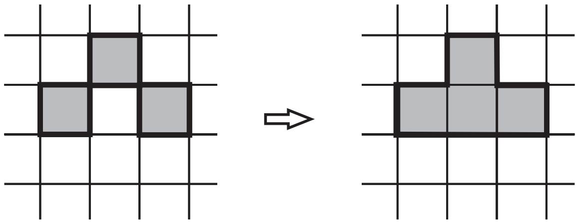


Figura 2: Infecção do Tipo 2.

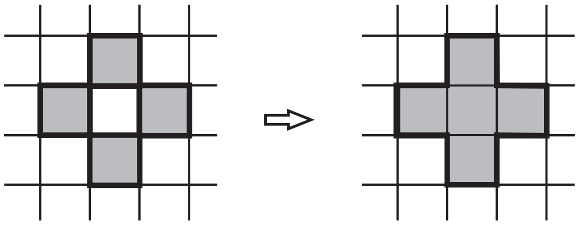


Figura 3: Infecção do Tipo 3.

não aumenta, nunca poderá chegar a 40 (já que inicialmente ele é no máximo 36). Porém, para ter certeza que essa hipótese é verdadeira, ainda temos que analisar o último caso:

Aqui podemos notar que o perímetro fica menor ainda, diminuindo em quatro unidades. Com isso, podemos concluir o problema. Ou seja, já que o perímetro inicial é no máximo 36 (caso em que não há duas casas infectadas vizinhas) e ele nunca cresce, jamais poderemos infectar completamente o tabuleiro. □

Problema 5. Um total de 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, uma pessoa anda para um quarto com número igual ou maior de pessoas do qual ela estava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

Solução. Sejam $a_1, a_2, ..., a_{115}$ a quantidade de pessoas nos quartos $1, 2, ..., 115$ respectivamente em um dado momento. Defina $I = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{115}^2$.
Digamos que uma pessoa sai de um quarto com n pessoas e vai para um quarto com m pessoas ($m \geq n$). A variação de I é dada por:

$$\Delta I = ((m+1)^2 + (n-1)^2) - (m^2 + n^2) = 2(m - n + 1) > 0$$

Assim, toda vez que uma pessoa muda de quarto o valor de I cresce. Porém, sabemos que o valor de I não pode crescer indefinidamente pois, o número de pessoas é finito. Ou seja, em um dado momento I não poderá mais crescer, isso só acontecerá quando nenhuma pessoa puder mudar de quarto. Logo, todas elas deverão estar no mesmo quarto. □

Problemas Propostos

Problema 6. (Rússia 1998) Um número de quatro dígitos é escrito no quadro-negro. As operações permitidas são: adicionar 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 9), ou subtrair 1 de dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 0). É possível obtermos 2002 a partir de 1234 realizando algumas operações?

Problema 7. Seja $d(x)$ a soma dos dígitos de $x \in \mathbb{N}$. Determine todas as soluções de $d(d(n)) + d(n) + n = 1997$.

Problema 8. (Torneio das Cidades) Todo membro de uma seqüência, iniciando do segundo, é igual a soma do termo anterior com a soma de seus dígitos. O primeiro número é 1. É possível que 123456 pertença à seqüência?

Problema 9. (Hong Kong 1997) Cinco números $1, 2, 3, 4, 5$ estão escritos em um quadro negro. Um estudante pode apagar dois dos números a e b e escrever nos seus lugares $a + b$ e ab. Após algumas operações podemos obter a quíntupla $21, 27, 64, 180, 540$?

Problema 10. (Torneio das Cidades 1985) Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?

Problema 11. Em uma fábrica de cartões existem três máquinas. A primeira recebe um cartão (a, b) e retorna um cartão $(a + 1, b + 1)$. A segunda recebe um cartão $(2a, 2b)$ e retorna um cartão (a, b). A terceira recebe dois cartões (a, b) e (b, c) e retorna o cartão (a, c). Todas as máquinas também retornam o(s) cartão(ões) dados. É possível fabricar um cartão $(1, 1988)$ se temos inicialmente apenas um cartão $(5, 19)$?

Problema 12. Com a calculadora KPK-1991 podemos efetuar duas operações: (a) elevar um número ao quadrado; e (b) e obter de um número X de n dígitos ($n > 3$) o número $A + B$, onde A é o número formado pelos três últimos de X e B o número formado pelos $(n-3)$ dígitos de X. Podemos obter o número 703 a partir de 604 usando essa calculadora?

Problema 13. (Rússia 1998) Os número 19 e 98 são escritos no quadro. A cada minuto, um deles é acrescentado 1 e o outro é elevado ao quadrado. É possível que os dois números se tornem iguais após diversas operações?

Problema 14. (Rússia 1998) Temos um tabuleiro $n \times n$ ($n > 100$) com $n - 1$ casas iguais a 1 e o restante iguais a 0. Podemos escolher uma casa, subtrair 1 dela, e adicionar 1 nas demais casas que estão na mesma liha e coluna desta. Com essa operação, podemos fazer com que todas as casas do tabuleiro se tornem iguais?

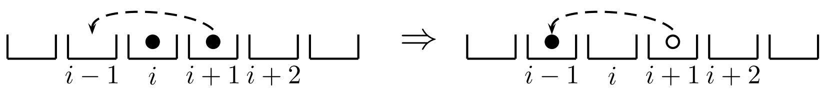
Problema 15. (Leningrado) Existem $n \geq 2$ números não-nulos escritos em um quadro. Podemos escolher dois números a e b e trocá-los por $a + b/2$ e $b - a/2$. Prove que após feito um movimento não podemos obter os números iniciais novamente.

Problema 16. (Ucrânia 2000) Existem inicialmente n números 1 escritos em um quadro. Em cada passo podemos apagar a e b e escrever o número $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$ no seu lugar. Após repetir essa operação $n-1$ vezes, prove que o último número escrito não pode ser menor que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Problema 17. (São Petersburgo 1998) Um total de 119 anões vivem em uma aldeia com 120 pequenas casas. Uma casa é dita super-habitada se 15 anões ou mais vivem nela. Todo dia, os anões de uma casa super-habitada têm uma briga e se mudam para outras casas da aldeia. Algum dia, necessariamente se encerrará?

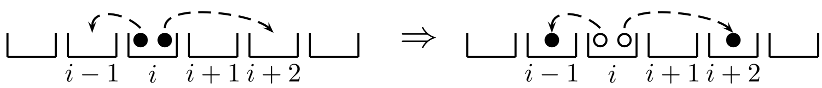
Problema 18. (Rússia 1997) Temos uma fileira longa de copos e n pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

Movimento tipo A:



Se há pelo menos uma pedra no copo i e pelo menos uma no copo $i+1$ podemos fazer uma pedra que está no copo $i+1$ pular para o copo $i-1$ eliminando uma pedra do copo i.

Movimento tipo B:



Se há pelo menos duas pedras no copo i podemos pular uma pedra para o copo $i+2$ e outra para o copo $i-1$.

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegamos a uma configuração a partir da qual não é possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso, essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.
Dica: Lembre-se de usar energia!