Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 13

Aula de Revisão

O objetivo desta aula é relembrar os principais conceitos e as ideias mais importantes que aprendemos durante a primeira parte do curso. Além disso, o aluno poderá utilizar o conjunto de problemas a seguir como um treinamento para provas de olimpíada. Pois, não ter um assunto central que serve de guia na solução dos problemas, é uma simulação da situação real que ocorre durante uma prova.

Problema 1. (AIME 1988) Determine a quantidade de divisores de 10^{99} que são múltiplos de 10^{88}.

Solução. Os divisores de 10^{99} são da forma $2^a \cdot 5^b$ com $0 \leq a, b \leq 99$ e para um divisor de 10^{99} ser um múltiplo de 10^{88}, devemos ter $88 \leq a, b \leq 99$. Portanto, são $12 \times 12 = 144$ tais números.

Problema 2. (Hungria 1989) Em cada um dos quatro vértices de um quadrado existe uma pedra. É permitido mudar a quantidade de pedras de acordo começando a seguinte regra: Podemos escolher um vértice, retirar qualquer quantidade positiva de pedras deste e adicionar o dobro destaa quantidade em cada um dos vértices adjacentes. É possível que após muitos movimentos obter 1989, 1988, 1990 e 1989 pedras em vértices consecutivos do quadrado.

Solução. Sejam (x, y, z, w) a quantidade de pedras em vértices consecutivos do quadrado em um dado momento. Considere a expressão

$$E = x + z - y - w.$$

Observe que E é invariante módulo 3, i.e. a cada movimento, o resíduo de E módulo 3 se mantém o mesmo. Inicialmente temos $E \equiv 0 \pmod 3$ para a quádrupla $(1, 1, 1, 1)$. Porém, para a quádrupla $(1989, 1988, 1990, 1989)$ o valor da expressão é tal quem $E \equiv 2 \pmod 3$. Portanto, é impossível obter tal configuração.

Problema 3. (Romênia 2010) Cada ponto do plano é pinta de uma de duas cores. Dado um número inteiro ímpar $n \geq 3$, prove que existem (pelo menos) dois triângulos monocromáticos e semelhantes cuja razão de semelhança é n.

Solução. Suponha que as cores sejam A (azul) e B (branco) e considere todas as semi-retas que partem da origem O. Dado um real positivo α, dizemos que uma semi-reta ℓ é do tipo AA se existirem dois pontos azuis X e Y sobre ℓ tais que $\dfrac{OX}{OY} = \alpha$. Defina os tipos AB, BA e BB de forma análoga.

Como existem infinitas semi-retas, pelo menos um tipo irá se repetir três vezes. Sem perda de generalidade, assuma que ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 são três semi-retas do tipo AB. Dessa forma, é possível encontrar pontos azuis X_1, X_2, X_3 e pontos brancos Y_1, Y_2, Y_3 que formam triângulos semelhantes com razão de semelhança igual a α. Tomando $\alpha = n$ obtemos o resultado procurado.

Problema 4. (URSS 1990) Em um Senado existem 30 senadores. Cada senador tem exatamente 6 inimigos. Quaisquer três deles formam uma comissão. Ache o número de comissões em que o membros são todos amigos ou todos inimigos.

Solução. Diremos que uma comissão é azul se satisfaz às condições do problema e diremos que uma comissão é vermelha caso não satisfaça. Seja x o número de comissões azuis e y o número de comissões vermelhas. De imediato, temos:

$$x + y = \binom{30}{3} = 4060.$$

Por outro lado, se cada senador listar todas as comissões em que os outros dois membros são ambos seus amigos, ou ambos seus inimigos, cada senador fará uma lista com $\binom{6}{2} + \binom{23}{2} = 268$ comissões. Obtendo um total de $30 \cdot 268 = 8040$ comissões listadas. Observe que as comissões azuis são listadas três vezes e as vermelhas apenas uma. Assim,

$$3x + y = 8040.$$

Resolvendo o sistema encontramos $x = 1990$.

Problema 5. (Torneio das Cidades 2000) Em um conjunto de 32 moedas, todas com mesma aparência, 30 são reais e 2 são falsas. Quaisquer duas moedas reais possuem o mesmo peso e as duas moedas falsas também possuem o mesmo peso, que é diferente do peso de uma moeda real. Mostre como dividir as moedas em dois grupos de mesmo peso usando uma balança de dois pratos no máximo quatro vezes.

Solução. Enumere as moedas de 0 a 31 porém usando a base binária. Ou seja, as moedas serão rotuladas de 0000 até 1111. Na primeira pesagem coloque todas as moedas cujo primeiro dígito é zero no prato esquerdo da balança e todas as moedas cujo primeiro dígito é 1 no prato direito. Na segunda pesagem coloque todas as moedas cujo segundo dígito é zero no prato esquerdo da balança e todas as moedas cujo segundo dígito é 1 no prato direito. Faça a terceira e a quarta pesagens de forma análoga.

Como os rótulos das moedas são todos diferentes em pelo menos um dígito, em alguma das quatro pesagens as duas moedas falsas estarão em pratos diferentes, e isso equilibrará a balança e ao mesmo tempo resolverá o problema já que em cada prato haverá 16 moedas.

Problemas Propostos

Problema 6. De quantas formas podemos organizar 10 casais ao redor de um cículo de modo que conjuges estejam sempre juntos?

Problema 7. (Torneio das Cidades 1997) Qual o número máximo de cavalos que podemos colocar em um tabuleiro 5×5 de modo que nenhum deles ataque um outro.

Problema 8. (Torneio das Cidades 1990) Um quadrado unitário preto é desenhado em um plano. Mostre que é possível cobrir este quadrado com sete outros quadrados unitários brancos sem sobrepor os quadrados brancos e de modo que cada quadrado branco cubra pelo menos um ponto preto.

Problema 9. (Torneio das Cidades 1995) Sônia possui moedas de 10, 15 e 20 *dinheirus* cujo valor total é 500 dinheirus. Ela possui 30 moedas. Mostre que ela possui mais moedas de 20 do que moedas de 10.

Problema 10. (Torneio das Cidades 1997) Dois jogadores se enfrentam no seguinte jogo: O primeiro pinta um ponto branco do plano de vermelho e, em seguida, o segundo pinta dez pontos brancos do plano de verde. O processo é repetido quantas vezes for necessário. O primeiro ganha se dezenhar um triângulo equilátero com todos vértices vermelhos. Mostre que o primeiro pode sempre garantir a vitória.

Problema 11. (Torneio das Cidades 1985) Existem 68 moedas, todas de pesos distintos. Mostre como achar a mais pesa e a mais leve usando uma balança de dois pratos não mais do que 100 vezes.

Problema 12. Arnaldo e Bernaldo estão brincando no quadro da sala de aula da seguinte maneira: eles escrevem inicialmente no quadro um número inteiro positivo n. Então, alternadamente, começando com Arnaldo, apagam o número que está no quadro e escrevem um novo número que pode ser:

- o que acabou de ser apagado menos a maior potência de 2 (com expoente inteiro não-negativo) menor do que ou igual ao número apagado;
- o que acabou de ser apagado dividido por 2, caso o número apagado seja par.

Vence a brincadeira quem obtiver primeiro o número zero.

a) Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora para $n = 40$ e descreva-a.

b) Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora para $n = 2012$ e descreva-a.

Problema 13. (Índia 2006) Quarenta e seis quadrados de um tabuleiro 9×9 são pintados de vermelho. Prove que existe um subtabueiro 2×2 com pelo menos três casas vermelhas.