Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

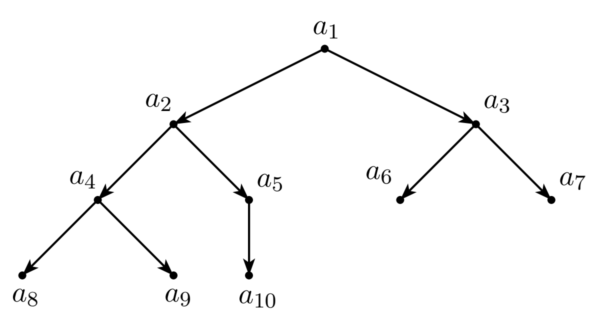
Aula 16

Combinatória e Sequências

Nesta aula iremos aplicar muitas das ideias que aprendemos durante esse curso para resolver problemas sobre sequências. Como aconteceu na aula de Combinatória Geométrica, tenha sempre em mente os princípios da casa dos pombos, do extremo e da invariância. Mas também não se esqueça de usar indução sempre que isto parecer útil. Porém, iremos iniciar a aula com um problema de contagem.

Problema 1. Determine a quantidade de diferentes permutações $a_1, a_2, ..., a_{10}$ dos inteiros $1, 2, ..., 10$ tais que $a_i > a_{2i}$ $(1 \leq i \leq 5)$ e $a_i > a_{2i}$ $(1 \leq i \leq 4)$.

Solução. Primeiramente, substitua as desigualdades do problema pelo seguinte diagrama:



O diagrama é construído de forma que a relação $a_i \to a_j$ indica que $a_i > a_j$. Pela figura, fica claro que devemos ter $a_1 = 10$. Dos 9 inteiros restantes, devemos escolher três deles para formar o conjunto $\{a_3, a_6, a_7\}$ feito isso, a_3 deve ser o maior deles, e a ordem entre a_6 e a_7 não deve importar. Portanto, temos $\binom{9}{3} \cdot 2$ possibilidades para os números a_3, a_6, a_7 do diagrama.

Até agora escolhemos a posição de quatro números. Os seis restantes farão parte do conjunto $\{a_2, a_4, a_5, a_8, a_9, a_{10}\}$. Observe que nesta situação, a_2 deve ser o maior dentre os seis inteiros restantes. Além disso, dos cinco que irão sobrar, após fixar a_2, devemos esolher três para formar o conjunto $\{a_4, a_8, a_9\}$. Destes três, a_4 deve ser o maior e a ordem entre

a_8 e a_9 não deverá importar. Logo, teremos $\binom{5}{3}\cdot 2$ possibilidades para o conjunto $\{a_4, a_8, a_9\}$.

Por fim, os dois números restantes serão a_5 e a_{10}, sendo a_5 o maior dentre esses dois. Portanto, temos

$$\binom{9}{3} \cdot 2 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2 = 3360$$

permutações com as propriedades requeridas.

Problema 2. Ache o maior valor possível da expressão

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1$$

para $n \geq 3$, onde $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma permutação arbitrária dos inteiros $1, 2, ..., n$.

Solução. Seja $S_n(x_1, ..., x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1$ a função acima e M_n seu valor máximo. Como S_n é invariante por permutações cíclicas, podemos escolher aquela em que $x_1 = n$. Observe que

$$\begin{aligned} S_n(n, x_2, ..., x_n) &= S_{n-1}(x_2, ..., x_n) - x_2x_n + nx_2 + nx_n \\ &= S_{n-1}(x_2, ..., x_n) + n^2 - (n - x_2)(n - x_n) \\ &\leq M_{n-1} + n^2 - 1 \cdot 2 \end{aligned}$$

em que na primeira igualdade usamos a definição de S_n, na segunda apenas reescremos $x_2x_n + nx_2 + nx_n$ e na terceira maxizamos o termo $-(n - x_2)(n - x_n)$ e usamos a definição de M_{n-1}.

Fazendo uma soma telescópica, temos

$$\begin{aligned} M_n &\leq M_3 + (4^2 - 2) + (5^2 - 2) + \cdots + (n^2 - 2) \\ &= 11 + (4^2 + 5^2 + \cdots + n^2) - 2(n - 3) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 11n + 18). \end{aligned}$$

Deixaremos a cargo do aluno a comprovação de que a cota obtida é realmente ótima.

Problema 3. (Cone Sul 2012) Ao redor de uma circunferência estão escritos 2012 números, cada um deles é igual a 1 ou a -1. Se não há 10 números consecutivos cuja soma seja 0, ache todos os valores possíveis da soma dos 2012 números.

Solução. Sejam $a_1, a_2, ..., a_{2012}$ os números escritos na circunferência. Seja S_i a soma de dez números consecutivos começando a parit de a_i. Observe que cada S_i deve ser um número par, já que é soma de dez número ímpares. Observe que $|S_i - S_{i+1}| \in \{0, 2\}$. Agora suponha que existem i e j tais que S_i e S_j possuem sinais diferentes. Por uma propriedade do tipo valor intermediário, deverá existir algum l entre i e j tal que $S_l = 0$.

Portanto, iremos assumir sem perda de generalidade que todos os S_i são positivos. Neste caso,

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{2012} \geq 2012 \times 2 = 4024$$

Na soma acima, cada a_i é contado exatamente 10 vezes. Logo, a soma de todos os números na circunferência deve ser pelo menos $402,4$. O primeiro número par que satisfaz essa cota é 404. Observe que é possível obter esse valor repetindo a sequência de blocos

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1$$

a partir de a_i. E cada par entre 404 e 2012 (incluindo 2012) é obtido trocando um (-1) por um (1) na configuração. Enquanto que os números negativos são obtidos trocando os sinais de todos os números de uma configuração.

Problema 4. (Rússia) Sejam $a_1, a_2, ..., a_m$, $b_1, b_2, ..., b_n$ reais positivos tais que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Em um tabuleiro vazio de m linhas e n colunas deve escrever números não-negativos de modo que a soma dos números na i-ésima linha seja igual a a_i e a soma dos números na j-ésima coluna seja igual a b_j ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$). Mostre que é possível obter tal configuração usando no máximo $m + n - 1$ números positivos.

Solução. Considere um segmento de tamanho $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ dividido em m segmentos de tamanhos $a_1, a_2, ..., a_m$. Chamaremos de A_i o segmento de comprimento a_i.

Considere também um segmento de tamanho $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ dividido em n segmentos de tamanhos $b_1, b_2, ..., b_n$. Chamaremos de B_j o segmento de comprimento b_j.

Os dois segmentos acima possuem o mesmo comprimento, já que $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Dessa forma, ao sobrepor esses segmentos iremos obter um terceiro que terá o mesmo tamanho e estará dividido em no máximo $m + n - 1$ subdivisões. Por fim, escrevemos na casa que está na linha i e coluna j do tabuleiro o tamanho do segmento $A_i \cap B_j$. E caso essa interseção seja vazia, escrevemos 0.

Problema 5. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n,\ b_1, b_2, ..., b_n$ duas permutações do conjunto de números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}$ tais que

$$a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq \cdots a_n + b_n.$$

Mostre que a desigualdade $a_k + b_k \leq \frac{4}{k}$ ocorre para todo $k = 1, 2, ..., n$.

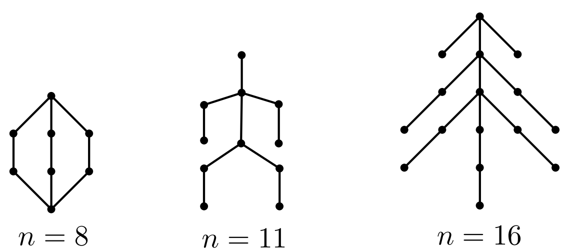
Solução. Fixe um índice k qualquer. Suponha que no conjunto de índices $\{1, 2, ..., k\}$ a desigualdade $a_j \leq b_j$ ocorra x vezes enquanto a desigualdade $a_j \geq b_j$ ocorra y vezes. Como $x + y \geq k$, assuma sem perda de generalidade que $x \geq k/2$. Defina b_s como o menor dentre os b_j's tais que $a_j \leq b_j$. Observe que devemos ter $b_s \leq \frac{1}{x}$, já que $b_j \geq b_s$ ocorre pelo menos x vezes. Dessa forma,

$$a_k + b_k \leq a_s + b_s \leq 2b_s \leq \frac{2}{x} \leq \frac{2}{k/2} \leq \frac{4}{k}.$$

Problemas Propostos

Problema 6. Complete os detalhes nas demonstrações dos problemas da parte teórica que não foram completamente detalhados.

Problema 7. Diagramas como o elaborado no primeiro problema são conhecidos como *Diagramas de Hasse para conjuntos parcialmente ordenados.* Neste exercício, você deve responder a seguinte pergunta: Dado um diagrama de Hasse com n vértices, quantas das permutações de $1, 2, ..., n$ satisfazem a ordem parcial dada por esse diagrama? Faça a análise dos seguintes casos:



Problema 8. Suponha que a soma dos inteiros não negativos $a_1, ..., a_n$ é igual a 1. Mostre que existe uma permutação $b_1, b_2, ..., b_n$ desses números tal que

$$b_1b_2 + b_2b_3 + \cdots + b_{n-1}b_n + b_nb_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Problema 9. Existem reais não-negativos $a_1, a_2, ..., a_7$ tais que $a_1 = a_7 = 0$ e ao mesmo tempo $a_{i+1} + a_{i-1} > a_i\sqrt{3}$ $(2 \leq i \leq 6)$?

Problema 10. Ache o maior valor possível da soma

$$S = |x_1 - 1| + |x_2 - 2| + \cdots + |x_n - n|,$$

onde $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma permutação de $1, 2, ..., n$.

Problema 11. Suponha que exista uma sequência infinita de números reais $x_1, x_2, ...$ tais que para quaisquer índices m, n temos

$$|x_{m+n} - x_n - x_m| < \frac{1}{m+n}.$$

Mostre que esta sequência é uma progressão aritmética.