Combinatória e Divisibilidade

Continuaremos aplicando as principais ideias que aprendemos durante o curso de Combinatória em outras áreas da Matemática. Desta vez, abordaremos problemas que envolvam algum conhecimento sobre Teoria dos Números.

Problema 1. (Rússia 1999) Um conjunto de números naturais é escolhido tal que entre quaisquer 1999 números naturais consecutivos, existe um número escolhido. Mostre que existem dois números escolhidos tais que um deles divide o outro.

Solução. Construa uma tabela com 1999 colunas e 2000 linhas. Na primeira linha escreva $1, 2, \ldots, 1999$. Defina as entradas das futuras linhas recursivamente como segue: suponha que as entradas na linha i são $k+1, k+2, \ldots, k+1999$ e que seu produto é M. Preencha a linha $i+1$ com $M+k+1, M+k+2, \ldots, M+k+1999$. Todas as entradas na linha $i+1$ são maiores do que as da linha i. Além disso, toda entrada divide a entrada imediatamente abaixo (e consequentemente toda entrada abaixo desta). Em cada linha existem 1999 números consecutivos, e assim cada linha contém um número escolhido. Como temos 2000 linhas, pelo princípio da casa dos pombos existem dois números escolhidos na mesma coluna. Mas daí um deles divide o outro, como desejado. ■

Problema 2. (Índia 1998) Seja M um inteiro positivo e considere o conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} \,|\, M^2 \leq n < (M+1)^2\}$. Prove que os produtos da forma ab, com $a, b \in S$, são todos distintos.

Solução. Provaremos a afirmação por contradição. Suponha o contrário, isto é, que existem a, b, c, $d \in S$ tais que $ab = cd$. Assuma, sem perda de generalidade, que $a < c, d$.

Sejam $p = \text{mdc}(a, c)$, $q = a/p$ e $r = c/p$. Então $\text{mdc}(q, r) = 1$. Daí, como

$$q \;\Big|\; \frac{ab}{p} = \frac{cd}{p} = rd,$$

segue que $q|d$. Seja agora $s = d/q$. Então $b = cd/a = rs$, de modo que $a = pq$, $b = rs$, $c = pr$ e $d = qs$, com p, q, r, s inteiros positivos.

Como $c > a$, temos que $r > q \Rightarrow r \geq q + 1$. Analogamente, $d > a \Rightarrow s \geq p + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} b &= rs \\ &\geq (p+1)(q+1) \\ &= pq + p + q + 1 \\ &\geq pq + 2\sqrt{pq} + 1 \\ &= a + 2\sqrt{a} + 1 \\ &\geq M^2 + 2M + 1 \\ &= (M+1)^2, \end{aligned}$$

uma contradição, já que b pertence a S. ■

Problema 3. Mostre que existe um bloco de 2002 inteiros positivos consecutivos contendo exatamente 150 primos. (Você pode usar o fato de que existem 168 primos menores do que 1000.)

Solução. Defina a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(a)$ = quantidade de primos entre os números $a, a+1, \ldots, a+2001$. Como existem 168 primos de 1 até 1000, temos $f(1000) > 168$. Observe que:

(i) $f(a+1) = f(a) + 1$ se a é composto e $a + 2002$ é primo;

(ii) $f(a+1) = f(a)$ se ambos a e $a + 2002$ são compostos ou primos;

(iii) $f(a+1) = f(a) - 1$ se a é primo e $a + 2002$ é composto.

Esses três caso são mutuamente exclusivos. Também, temos $f(2003! + 2) = 0$ (verifique). Como f decresce em cada passo por no máximo 1 e parte de 168 até chegar em 0, $f(n)$ deve ser igual a 150 para algum n entre 1 e $2003! + 2$, como queríamos. ■

Problema 4. (Rioplatense 1999) Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primos distintos. Considere todos os inteiros positivos que utilizam apenas esses primos (não necessariamente todos) em sua fatoração em números primos, formando assim uma seqüência infinita

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots .$$

Demonstre que, para cada natural c, existe um natural n tal que

$$a_{n+1} - a_n > c.$$

Solução. Suponha, por absurdo, que exista $c > 0$ tal que $a_{n+1} - a_n \leq c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Isso significa que as diferenças entre os termos consecutivos de $(a_n)_{n\geq 1}$ pertencem ao conjunto $\{1, 2, \ldots, c\}$, logo são finitas. Sejam $d_1, d_2, \ldots, d_r$ essas diferenças. Seja α_i o maior expoente de p_i que aparece na fatoração de todos os d_j.

Considere então o número $M = p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}$. É claro que M pertence à seqüência, ou seja, $M = a_n$, para algum n. Vejamos quem será a_{n+1}. Por hipótese, existe i tal que $a_{n+1} - a_n = d_i$. Como $a_{n+1} > a_n$, existe um primo p_j que divide a_{n+1} com expoente maior ou igual a $\alpha_j + 1$. Caso contrário,

$$a_n < a_{n+1} < p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1} = a_n\,,$$

absurdo. Daí, $p_j^{\alpha_j+1}|a_n \Rightarrow p_j^{\alpha_j+1}|d_i$, novamente um absurdo, pela maximalidade de α_j.

Logo, o conjunto de todas as diferenças não pode ser finito e, portanto, dado qualquer $c > 0$, existe um natural n tal que $a_{n+1} - a_n > c$. ■

Problema 5. (EUA 1998) Prove que, para cada inteiro $n \geq 2$, existe um conjunto S de n inteiros positivos tal que $(a-b)^2 \mid ab$ para quaisquer a e b distintos pertencentes a S.

Solução. Na hora de montar qualquer exemplo de conjunto, faça sempre casos pequenos. Considere $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ e veja a cara do exemplo. Lembre-se de sempre seguir um padrão nessa hora, pois se o exemplo que você achar para 3 tiver alguma coisa em comum com o exemplo para 2, o exemplo para 4 for parecido com o para 3 e assim por diante... Ótimo! O resto sairá por indução.

Depois de fazer alguns casos pequenos, encontramos a cara do conjunto S: dado n, construiremos S com n elementos tal que $(a-b)|a$ e $(a-b)|b$ para todos a, b pertencentes a S. Um conjunto com essas propriedades claramente satisfaz o enunciado. Comece com o conjunto $\{2, 3\}$.

<u>Passo indutivo:</u> suponha que encontramos um conjunto S, $|S| = n$, satisfazendo as condições do enunciado. Seja m o mínimo múltiplo comum dos elementos de S. Tome o conjunto $S' = \{m + S\} \cup \{m\}$ (se X é um conjunto e a é um número qualquer, o conjunto $X + a$ ou $a+X$ é dado por $\{a+x \mid x \in X\}$). Logo, $|S'| = n+1$. Pelos casos particulares, desconfiamos que S' satisfaz as propriedades requeridas. Vejamos... Sejam a', b' elementos quaisquer de S'. Podemos considerar dois casos:

I. $a' = m+a$, $b' = m+b$: então $a'-b' = (m+a)-(m+b) = a-b$. Como $(a-b)|a$, $(a-b)|b$ (pela hipótese indutiva) e m é múltiplo comum de a e b, segue que $(a'-b')|(m+a) = a'$ e $(a'-b')|(m+b) = b'$.

II. $a' = m + a$, $b' = m$: então $a' - b' = (m+a) - m = a \Rightarrow (a'-b')|a'$ e $(a'-b')|b'$, já que m é múltiplo de a.

Pronto! ■

Problemas Propostos

Problema 6. (Ibero 1998) Encontre o menor natural n com a propriedade de que entre quaisquer n números distintos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 999\}$ podemos encontrar quatro números distintos a, b, c, d tais que $a + 2b + 3c = d$.

Problema 7. (Romênia 1999) Seja $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$, e sejam

$$\begin{aligned} S &= \{P(n) \,|\, n \in \mathbb{N}, n \leq 1999\}, \\ T &= \{n^2 + 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}, \\ U &= \{n^2 + 2 \,|\, n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Prove que $S \cap T$ e $S \cap U$ têm o mesmo número de elementos.

Problema 8. (Polônia 2000) A seqüência $p_1, p_2, \ldots$ de números primos satisfaz a seguinte condição: para cada n maior ou igual a 3, p_n é o maior divisor primo de $p_{n-1} + p_{n-2} + 2000$. Prove que a seqüência é limitada.

Problema 9. (Rússia 2000) Prove que o conjunto de todos os inteiros positivos pode ser particionado em 100 subconjuntos não-vazios de modo que se três inteiros positivos satisfazem $a + 99b = c$, então dois deles pertencem ao mesmo subconjunto.

Problema 10. (Lista Cone Sul 2007) Um subconjunto M de $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ não contém três elementos cujo produto é um quadrado perfeito. Determine o número máximo de elementos de M.

Problema 11. (Reino Unido 1999) Para cada inteiro positivo n, seja $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Para quais valores de n é possível expressar S_n como união de dois subconjuntos não-vazios disjuntos tais que a soma dos elementos de cada subconjunto é a mesma?

(b) Para quais valores de n é possível expressar S_n como união de três subconjuntos não-vazios disjuntos tais que a soma dos elementos de cada subconjunto é a mesma?

Problema 12. (Irã 1999) Seja $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos de S tais que, para quaisquer $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq k$, temos

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \leq n - 2.$$

Prove que $k \leq 2^{n-2}$.