Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 18

## Miscelânea I

Nas duas próximas aulas faremos um conjunto de problemas que irão fixar as idéas aprendidas durante o curso. Além disso, não saber previamente o assunto no qual cada problema se encaixa serve como treinamento para os diversos exames que existem atualmente.

**Problema 1.** Dados 7 inteiros positivos distintos cuja soma é 100, prove que podemos escolher três deles cuja soma é pelo menos 50.

Este primeiro problema parece ser um problema cuja solução é dada através do princípio da casa dos pombos. Porém, vamos usar uma idéia um pouco menos conhecida, mas que é de fundamental importância conhecer: o *Arranjo em Ordem*.

**Solução.** Sejam $a < b < c < d < e < f < g$ estes números. Vamos mostrar que $e + f + g \geq 50$. Se $e > 15$, então $e + f + g \geq 16 + 17 + 18 = 51$. Caso $e \leq 15$, então $a + b + c + d \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$; portanto $e + f + g = 100 - a - b - c - d \geq 50$. ■

**Problema 2.** Dados $2n + 3$ pontos no plano, não três colineares e não quatro concíclicos, prove que existe um círculo passando por três destes pontos de modo que existam $n$ pontos no seu interior e $n$ pontos no seu exterior.

**Solução.** Sejam $A$ e $B$ dois pontos consecutivos do fecho convexo. Denote os demais pontos por $P_1, P_2, ..., P_{2n+1}$ de modo que $\angle AP_iB > \angle AP_{i+1}B$. Isso pode ser feito sem problemas, já que não há quatro pontos concíclicos. Note que o círculo que passa pelos pontos $A, B, P_{n+1}$ satisfaz às condições do problema. ■

**Problema 3.** Prove que existe um conjunto $S$ de $3^{1000}$ pontos no plano tal que, para cada ponto $P$ de $S$, existem pelo menos 2000 pontos em $S$ cuja distância para $P$ é exatamente uma unidade.

**Solução.** Vamos mostrar, por indução sobre $k$, que existe um conjunto $S_k$ de $3^k$ pontos no plano tal que cada ponto de $S_k$ dista uma unidade de pelo menos $2k$ pontos de $S_k$.

Tomando $k = 1000$, provamos o problema.

**Caso inicial:** tome $S_1$ como os vértices de um triângulo eqüilátero de lado 1.

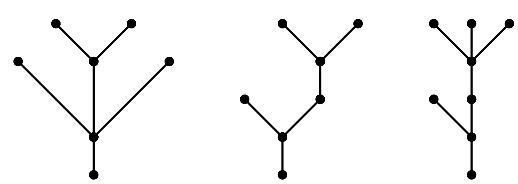
**Hipótese de indução:** suponha a existência de $S_k$ como acima, para algum $k \geq 1$.

**Passo indutivo:** seja $v$ um vetor. A partir de cada ponto $P$ de $S_k$, construa um triângulo eqüilátero $\Delta_P$ de lado 1 na direção de $v$. Se $v$ puder ser escolhido de modo que os vértices de $\Delta_P$ e $\Delta_Q$ não coincidam sempre que $P \neq Q$, então o conjunto $S_{k+1}$ formado pelos vértices de todos os triângulos $\Delta_P$, $P \in S_k$, satisfaz o problema. Para mostrar isso, note inicialmente que $S_{k+1}$ nada mais é do que a união de $S_k$ e de duas translações de $S_k$ de uma unidade cujas direções formam um ângulo de 60°. Assim, $S_{k+1}$ tem $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ pontos, e cada ponto de $S_{k+1}$ dista uma unidade de pelo menos $2(k+1)$ pontos de $S_{k+1}$: $2k$ devido à propriedade de $S_k$ e 2 devido à construção dos triângulos $\Delta_P$.

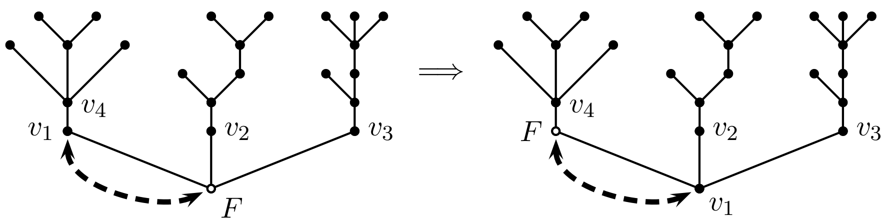
Para escolher $v$, basta tomá-lo em uma direção distinta de todas as direções de pares de pontos de $S_k$. Isso pode ser feito porque a quantidade de direções de pares de pontos de $S_k$ é finita. ■

**Problema 4.** (Rioplatense 2003) Sobre uma mesa tem-se $n \geq 2$ bolsas de plástico, todas de cores distintas. Cada uma está em contato com a mesa ou está dentro de outra bolsa. A operação permitida é escolher uma bolsa que está em contato com a mesa, retirar todas as bolsas do seu interior e coloca-las sobre a mesa e colocar todas as outras bolsas que estavam fora e colocar no seu interior (sem modificar o conteúdo das outras bolsas). Determine o total de configurações diferentes que podem ser obtidas utilizando a operação quantas vezes o necessário.

**Solução.** Construa um grafo com $n$ vértices, onde cada vértice representa uma bolsa. Vamos ligar dois vértices $v_i, v_j$ se as bolsas $b_i, b_j$ estão imediatamente uma dentro da outra. O grafo será algo semelhante ao grafo abaixo.



Agora construa um novo vértice $F$ e ligue-o a todos os vértices que representam as bolsas que estão sobre a mesa. Note que aplicar a operação, no grafo representa trocar a posição do vértice $F$ pela posição do vértice que foi operado. E como o grafo possui um total de $n+1$ vértices, existem ao todo $n+1$ configurações.




A figura acima mostra a troca das posições dos vértices $F$ e $v_1$. Os vértices $v_1, v_2, v_3$ representam as três bolsas que estavam inicialmente sobre a mesa. Note que após aplicar a operação, os vértices que ficam ligados a $F$ são $v_1$ e $v_4$, e as bolsas que ficam sobre a mesa são exatamente $b_1$ e $b_4$. □

**Problema 5.** (URSS 1990) Suponha que existam 1990 pilhas, consistindo de $1, 2, ..., 1990$ pedras, respectivamente. Em um movimento pode-se escolher algumas pilhas (possivelmente apenas uma) e retirar de cada pilha escolhida uma quantidade fixa de pedras. Qual o menor número de movimentos necessários para se retirar todas as pedras de todas as pilhas?

**Solução.** Separe as pilhas em grupos com a mesma quantidade pedras, onde pilhas vazias formam seu próprio grupo. Dessa forma, inicialmente temos 1990 grupos distintos. Suponha que em um dado momento existam $n$ grupos de pilhas e realizamos um movimento que consiste em retirar uma mesma quantidade de pedras de pilhas que estão em $k$ diferentes grupos. Este grupo de pilhas que realizamos a operação continua representando $k$ diferentes grupos. Além disso, as demais pilhas dos demais $n-k$ grupos que não foram alterados continuam representando $n-k$ grupos distintos. Dessa forma, após realizar um movimento que altera pilhas de $k$ grupos, temos pelo menos $\max(n-k, k)$ grupos no próximo momento. Portanto, o número de diferentes grupos não decresce mais rápido do que a sequência:

$$995, 498, 249, 125, 63, 32, 16, 8, 4, 2, 1.$$

Assim, temos que utilizar pelo menos 11 movimentos.

Agora iremos demonstrar que é possível retirar todas as pedras utilizando exatamente 11 movimentos. Seja $m_n$ o movimento que retira $n$ pedras de cada pilha que possui $n$ pedras ou mais. Agora considere a sequência de movimentos:

$$m_{995}, m_{498}, m_{249}, m_{125}, m_{63}, m_{32}, m_{16}, m_8, m_4, m_2, m_1.$$

É fácil verificar que esta sequência é capaz de retirar toas as pedras. ■

# Problemas Propostos

**Problema 6.** Considere um conjunto de $2n+2$ pontos no plano, não três colineares. Prove que podemos escolher dois destes pontos de modo que a reta que os une divive o restante do conjunto em duas partes com $n$ pontos cada.

**Problema 7.** Dados 69 inteiros positivos distintos menores do que 101, prove que podemos escolher quatro deles $a, b, c, d$ tais que $a < b < c$ e $a + b + c = d$. Este fato continua verdadeiro para 68 números?

**Problema 8.** (USAMO 1996) Dados $n$ inteiros positivos, considere todas as possíveis somas formadas por um ou mais deles. Prove que todas estas somas podem ser divididas em $n$ grupos tais que em cada grupo a razão entre o maior elemento e o menor não excede 2.

**Problema 9.** Prove que qualquer triângulo pode ser particionado em $n \geq 4$ triângulos isósceles.

**Problema 10.** Prove que um quadrado pode ser particionado em $n \geq 6$ quadrados menores. Prove que isso não pode ser feito para $n = 5$.

**Problema 11.** (Romênia 1978) Mostre que um cubo pode ser particionao em $n \geq 55$ cubos menores.

**Problema 12.** Um retângulo $R$ é coberto por retângulos menores (com lados paralelos ao do retângulo $R$) cada um deles com pelo menos um lado inteiro. Prove que $R$ também possui um lado inteiro.

**Problema 13.** (São Petersburgo 2000) Em um tabuleiro infinito são colocados 111 $L-$triminós sem sobreposiçao de modo que qualquer quadrado $2 \times 2$ que cubra um deles seja coberto totalmente por esses $L-$triminós. Prove que podemos retirar alguns deles (mas não todos) de modo que a propriedade continue válida.

**Problema 14.** (São Petersburgo 2000) Em cada casa de um tabuleiro $8 \times 8$ é escrito um real positivo tal que a soma dos números em cada linha é 1. Sabe-se que para quaisquer oito quadrados (não dois na mesma linha ou coluna) o produto dos números nestes quadrados não é maior que o produto dos números da diagonal principal. Prove que a soma dos números na diagonal principal é pelo menos 1.