Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 19

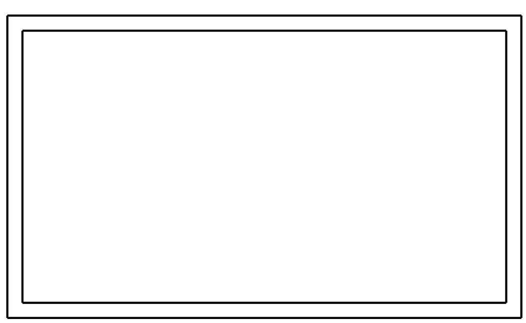
Miscelânea II

Como prometido, em nesta última aula do treinamento em combinatória para alunos do nível 2, iremos continuar resolvendo alguns problemas diversos. Muitos dos exemplos a seguir foram retirados de treinamentos anteriores para a olimpíada do Cone Sul. Dessa forma, acreditamos que um aluno que utilizou os materiais deste curso como referência para um treinamento inicial em combinatória está apto a participar da seletiva da Cone Sul de forma competitiva.

Problema 1. (Komal 2007) Na floresta onde vivem os Smurfs, Gargamel plantou 1280 pinheiros, cada um com 1 metro de diâmetro. A floresta é um campo retangular de dimensões 1001×945 metros. Vovô Smurf gostaria de construir nela sete campos de tênis, cada um deles de dimensões 20×34 metros. Vovô Smurf conseguirá fazer a construção sem derrubar nenhuma árvore, independente de como Gargamel plante as árvores?

Solução. Vovô Smurf, seja esperto e utilize a estratégia abaixo.

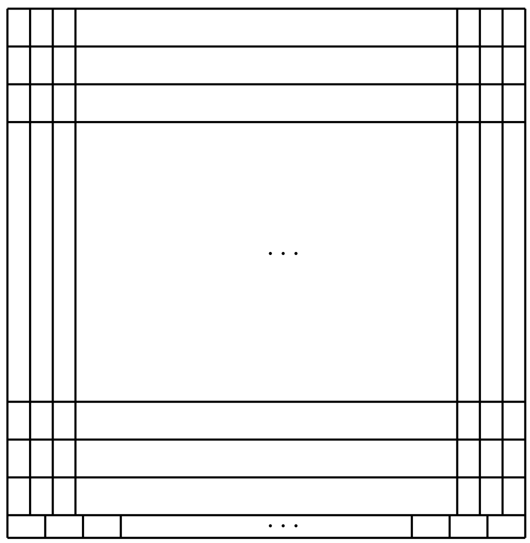
Divida a floresta em k retângulos de dimensões 21×35. Para cada pinheiro plantado por Gargamel, associe o retângulo que contém o centro do pinheiro (se o pinheiro pertencer a mais de um retângulo, associe qualquer um deles). Dessa maneira, em cada retângulo que não está associado a nenhum pinheiro, é possível construir um campo de tênis no subretângulo central de dimensões 20×34.



Portanto, se $k \geq 1287$, Vovô Smurf conseguirá, pelo Princípio da Casa dos Pombos, realizar seu objetivo. E de fato isso é possível, através da seguinte divisão:

- particione o tabuleiro 980×945 em
$$\frac{980}{35} \cdot \frac{945}{21} = 28 \cdot 45 = 1260$$
subretângulos de dimensões 35×21.

- particione o tabuleiro 21×945 remanescente em
$$\frac{945}{35} = 27$$
subretângulos de dimensões 21×35.



Isso conclui o afirmado.

Problema 2. Em um torneio de tênis com 14 jogadores, cada um joga com todos os outros exatamente uma vez e não há empates. Prove que é possível escolher três jogadores para os quais qualquer um dos outros onze times perdeu para pelo menos um desses três.

Sejam $P_1, \ldots, P_{14}$ os jogadores e suponha que P_1 foi quem mais venceu. O total de partidas é
$$\binom{14}{2} = 91$$
e portanto, pelo Princípio da Casa dos Pombos, P_1 venceu pelo menos 7 delas. Vamos analisar os casos.

(i) P_1 venceu 7 partidas: podemos supor que P_1 venceu de $P_2, \ldots, P_8$ e perdeu de $P_9, \ldots, P_{14}$. Entre esses seis últimos, ocorreram
$$\binom{6}{2} = 15$$

partidas e novamente, pelo Princípio da Casa dos Pombos, algum deles, digamos P_9, venceu pelo menos três das quatro partidas disputadas com $P_{10}, \ldots, P_{14}$. Suponha que P_9 venceu de P_{10}, P_{11} e P_{12}. Daí, se P_{13} venceu de P_{14}, os jogadores P_1, P_9 e P_{13} satisfazem as condições do problema.

(ii) P_1 venceu 8 partidas: suponha que P_1 venceu de $P_2, \ldots, P_9$ e perdeu de $P_{10}, \ldots, P_{14}$. Entre $P_{10}, \ldots, P_{14}$, ocorreram

$$\binom{5}{2} = 10$$

partidas e daí algum deles venceu duas das quatro partidas disputadas. Sem perda de generalidade, se P_{10} ganhou de P_{11}, P_{12} e P_{13} ganhou de P_{14}, a tripla P_1, P_{10}, P_{13} satisfaz o requerido.

(iii) P_1 venceu 9 partidas: se P_1 venceu de $P_2, \ldots, P_{10}$, perdeu de $P_{11}, \ldots, P_{14}$ e, além disso, P_{11} venceu de P_{12} e P_{13} venceu de P_{14}, a tripla P_1, P_{11}, P_{13} tem as propriedades procuradas. ■

Problema 3. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontos sobre uma circunferência. Entre cada par de pontos, existe um segmento de reta pintado de vermelho ou azul de modo que P_iP_j é vermelho se e somente se $P_{i+1}P_{j+1}$ é azul, para quaisquer índices $1 \leq i < j \leq n$ (aqui, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Para quais valores de n tal coloração é possível?

(b) Mostre que tais colorações têm a seguinte propriedade:

"Dados quaisquer dois pontos, existe uma linha poligonal de no máximo três segmentos, todos vermelhos, unindo esses dois pontos."

Solução. (a) Vamos mostrar que a coloração é possível se e somente se n é múltiplo de 4. Se P_1P_2 é azul, então P_2P_3 é vermelha e, por indução,

$$P_iP_{i+1} \text{ é azul } \iff i \text{ é ímpar.}$$

Como $P_{n+1}P_{n+2} = P_1P_2$, $n+1$. Daí, $n = 2m$ e, aplicando o mesmo raciocínio ao par de índices $(1, 1+m)$, obtemos que

$$P_iP_{i+m} \text{ tem a mesma cor de } P_1P_{1+m} \iff i \text{ é ímpar}$$

de modo que m é par, pois $P_{1+m}P_{1+2m} = P_1P_{1+m}$.

Reciprocamente, se $n = 4k$, pinte as arestas

$$P_iP_{i+1}, P_iP_{i+2}, \ldots, P_iP_{i+2k}$$

de azul se i é par e de vermelho caso contrário. Note que a coloração está bem-definida, pois i e $i + 2k$ têm a mesma paridade e portanto a cor da aresta

$$P_{i+m}P_{i+2m}$$

coincide com a de P_iP_{i+m}. É claro que a pintura acima satisfaz as condições do problema.

(b) Seja P_iP_j a aresta considerada. Se ela for vermelha, não há nada a fazer. Suponha que ela seja azul. Então $P_{i-1}P_{j-1}$ e $P_{i+1}P_{j+1}$ são vermelhas. Alguma das arestas $P_{i-1}P_i$ ou P_iP_{i+1} é vermelha. Sem perda de generalidade, suponha que $P_{i-1}P_i$ seja vermelha. Vamos analisar dois casos.

(i) $j-i$ é par: a aresta $P_{j-1}P_j$ é vermelha e portanto o caminho

$$P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow P_{j-1} \longrightarrow P_j$$

é monocromático vermelho.

(ii) $j-i$ é ímpar: a aresta P_jP_{j+1} é vermelha. Alguma das arestas $P_{i-1}P_j$ ou P_iP_{j+1} é vermelha. Se for a primeira,

$$P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow P_j$$

é um caminho monocromático vermelho de tamanho 2. Senão, P_iP_{j+1} é vermelha e o caminho monocromático requerido é

$$P_i \longrightarrow P_{j+1} \longrightarrow P_j.$$

■

Problema 4. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Cada ponto de uma circunferência é colorido com uma dentre n cores. Prove que existe um trapézio inscrito na circunferência com todos os seus vértices pintados da mesma cor.

Solução. Vamos tomar um polígono regular inscrito na circunferência com uma quantidade k suficientemente grande de vértices de modo que existam dois pares de vértices que definem arcos de comprimentos iguais e pintados da mesma cor.

Tome $k = (n+1)(n^2+1)$ e divida o polígono em n^2+1 blocos de vértices consecutivos. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, cada bloco contém dois vértices pintados da mesma cor c. Se esses vértices definem um arco de tamanho l, associe o par (c, l) ao bloco. Cada coordenada desse par pode assumir n valores, visto que c representa uma cor e l representa uma distância entre dois vértices de um bloco. Assim, novamente pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem dois blocos associados ao mesmo par. Isso conclui a prova. ■

Problemas Propostos

Problema 5. (Rússia) É possível colocar 1965 pontos em um quadrado de lado 1 de maneira que qualquer retângulo de área 1/200 contido no quadrado e com lados paralelos aos lados dele contenha pelo menos um desses pontos?

Problema 6. (USAMO 1989) Um torneio de xadrez com 20 jogadores teve 14 partidas. Sabendo que cada competidor jogou pelo menos uma vez, prove que 6 dessas partidas contaram com 12 jogadores diferentes.

Problema 7. (IMO 1985) Sejam n, k inteiros positivos primos entre si, com $k < n$. Pintamos cada número em $M = \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ de azul ou branco, de modo que i e $n - i$ têm a mesma cor. Sabendo também que, se $i \neq k$, então i e $|i - k|$ têm a mesma cor, prove que todos os números em M têm a mesma cor.

Problema 8. Quantos são as triplas ordenadas (a, b, c) formadas por inteiros positivos tais que $a + b + c = 94$ e $\dfrac{94!}{a!b!c!}$ seja divisível por 3?

Problema 9. (Baltic Way 2005) Uma tabela possui n linhas e 6 colunas, onde $n \geq 2$. Em cada casa está escrito 0 ou 1. Todas as linhas são diferentes uma das outras. Além disso, para cada para de linhas $(x_1, x_2, ..., x_6)$ e $(y_1, y_2, ..., y_n)$, a linha $(x_1y_1, x_2y_2, ..., x_6y_6)$ também pode ser encontrada na tabela. Prove que existe uma coluna em que pelo menos metade das casas são zeros.

Problema 10. (Macedônia 2003) Um tabuleiro 2003×2003 pode ser coberto por dominós 1×2 horizontais e peças 3×1 verticais?

Problema 11. Os números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2012}$ estão escritos no quadro negro. Gugu escolhe quaisquer dois destes números x e y, apága-os e em seguida escreve $x + y + xy$ no quadro. Ele faz isso até que sobre apenas um número no quadro. Quais são os possíveis valores do último número escrito?