Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 1

Contagens Elementares: Princípio Aditivo e Multiplicativo

Uma das primeiras habilidades a se dominar em Combinatória é *contagem*. Nessa primeira aula, veremos como contar objetos de modo estruturado.

Somar? Subtrair? Multiplicar? Conjuntos!

O modo matemático mais eficaz de se modelar problemas de contagem é utilizar conjuntos, de modo que todo problema de contagem se resume a encontrar a cardinalidade de conjuntos. A principal vantagem desse método é que podemos utilizar as seguintes fórmulas de conjuntos: denotando $|A|$ como o número de elementos de A e sendo A e B conjuntos de um universo U, temos:

- $A \subset B$ se, e somente se, para todo $x \in U$, $x \in A \implies x \in B$ (inclusão)
- $A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$ (interseção)
- $A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (união)
- $A \setminus B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ (subtração de conjuntos)
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$ (produto cartesiano)
- Se $A \cap B = \emptyset$, $|A \cup B| = |A| + |B|$ (princípio da adição)
- Em geral, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (princípio da inclusão-exclusão para dois conjuntos)
- Se $A \subset B$ então $|B \setminus A| = |B| - |A|$ ("tudo menos o que não interessa")
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (princípio da multiplicação)

A tabela a seguir resume as operações.

Palavra-chave	Operação de conjuntos	Operação na cardinalidade
ou	união ($\cup$)	$+/-$
e	interseção ($\cap$)	$+/-$
menos	subtração ($\setminus$)	$-$
e	produto cartesiano ($\times$)	$\cdot$

Vejamos, com exemplos, como lidar com isso.

Exemplo 1. *Esmeralda derrubou os quatro livros que tinha em uma estante. De quantas maneiras ela pode colocar os livros de volta na estante, de modo que nenhum deles fique no seu lugar original?*

Solução: Numeremos os livros de 1 a 4, de acordo com as suas posições originais. Seja (a, b, c, d) os números dos livros, na ordem em que são colocados de volta na estante. Assim, devemos contar as quádruplas (a, b, c, d) com a, b, c, d sendo $1, 2, 3, 4$, em alguma ordem, de modo que $a \neq 1$, $b \neq 2$, $c \neq 3$ e $d \neq 4$. Nesse caso, podemos listar todas as possibilidades:

$$\begin{aligned} A = \{&(2,1,4,3),(2,3,4,1),(2,4,1,3),\\ &(3,1,4,2),(3,4,1,2),(3,4,2,1),\\ &(4,1,2,3),(4,3,1,2),(4,3,2,1)\} \end{aligned}$$

Há, assim, $|A| = 9$ maneiras de colocar os livros de volta à estante nas condições do enunciado.
Comentário: Note que, em nenhum momento precisamos fazer alguma operação de conjuntos; mas note que os elementos de A foram listados em uma *ordem específica*, que nesse caso é a *ordem lexicográfica*, ou seja, classificamos pela primeira coordenada, depois pela segunda, e assim por diante. É muito importante, ao listar os elementos de um conjunto, fazê-lo em alguma ordem bem definida.

Exemplo 2. *Esmeralda tem uma gaveta com senha, que consiste de três números, em sequência. Porém, ela esqueceu a senha. Ela se lembra de que dois dos números da sequência são 17 e 24, mas não se lembra a ordem dos números. Há 40 possibilidades para o terceiro número. Se ela faz uma tentativa a cada 10 segundos é muito azarada, em quantos minutos ela abre a gaveta?*

Solução: Sendo (a, b, c) a senha de Esmeralda e X o conjunto das 40 possibilidades, o conjunto A das possibilidades de Esmeralda pode ser dividido nos conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(17,24,x) : x \in X\}\\ A_2 &= \{(24,17,x) : x \in X\}\\ A_3 &= \{(17,x,24) : x \in X\}\\ A_4 &= \{(24,x,17) : x \in X\}\\ A_5 &= \{(x,17,24) : x \in X\}\\ A_6 &= \{(x,24,17) : x \in X\} \end{aligned}$$

Temos $|A_i| = 40$, então $|A| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots A_6| = 6 \cdot 40 = 240$ e ela demora $240 \cdot 10 = 2400$ segundos, ou 40 minutos. Certo?

Errado! Os conjuntos $|A_i|$ não são disjuntos (ou seja, quaisquer dois têm interseção vazia). Por exemplo, $(17, 24, 24)$ pertence a A_1 e A_2 (lembre-se, gavetas com senha podem ter números repetidos nas senhas!). De fato, as 6 sequências $(17, 24, 24)$, $(24, 17, 24)$,

$(24, 24, 17)$, $(24, 17, 17)$, $(17, 24, 17)$ e $(17, 17, 24)$ foram contadas duas vezes. Com isso, temos 6 tentativas a menos, e um minuto a menos. Logo $|A| = 240 - 6 = 234$ e o processo demora, na verdade, 39 minutos.

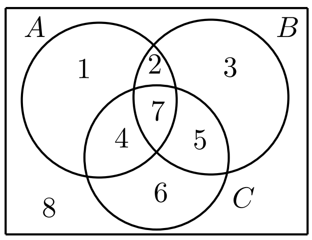
Exemplo 3. *Quantos divisores positivos de 10^{99} são múltiplos de 10^{88}?*

Solução: Seja n um divisor de 10^{99} que é múltiplo de 10^{88}. Vamos começar com a condição de que n é múltiplo de 10^{88}: devemos ter $n = 10^{88} \cdot t$, t inteiro positivo. Nossa meta é agora contar todos os números t. Além disso, 10^{99} é múltiplo de n, de modo que $10^{99} = n \cdot k \iff 10^{99} = 10^{88} \cdot t \cdot k \iff t \cdot k = 10^{11}$. Logo t deve ser divisor de 10^{11}.

Sendo $10^{11} = 2^{11} \cdot 5^{11}$, os divisores de 10^{11} são da forma $2^a \cdot 5^b$ com $0 \le a \le 11$ e $0 \le b \le 11$. Assim, precisamos contar o número de ternas (a, b) com $0 \le a \le 11$ e $0 \le b \le 11$, ou seja, o número de elementos de $\{0, 1, 2, \ldots, 11\} \times \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$, que é $12 \cdot 12 = 144$.

Exemplo 4. *Encontre o número de ternos ordenados (A, B, C) de conjuntos tais que $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$.*

Solução: Considere o diagrama de Venn a seguir:



Note que para que $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, nenhum dos números $1, 2, 3, \ldots, 100$ deve ficar "fora" de todos os conjuntos A, B, C (região 8). Além disso, para que $A \cap B \cap C = \emptyset$, nenhum desses números pode estar nos três conjuntos, ou seja, a região 7 não pode receber números. Com isso, cada número tem 6 possibilidades de região (de 1 a 6 no diagrama). Logo, devemos contar o número de 100-uplas $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100})$ em que cada a_i diz para que região o número i vai, ou seja, a_i é 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Por exemplo, $A = B = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ e $C = \emptyset$ corresponde a $(2, 2, 2, \ldots, 2)$. O total pedido é, então, $|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{100}| = 6^{100}$.

Exemplo 5. *Um código consiste de uma sequência de três letras seguidas de três algarismos. Quantos códigos diferentes existem se o algarismo 0 e a letra O não podem ser utilizados ao mesmo tempo?*

Solução: Há 26 letras e 10 algarismos. As sequências de letras correspondem a uma terna ordenada (a, b, c) de letras, e são em total de $|\{'A', 'B', \ldots, 'Z'\}|^3 = 26^3$. Dessas, 25^3 não contêm a letra O e as demais, $26^3 - 25^3$ as contêm. Do mesmo modo, há 10^3 sequências de três algarismos, dentre as quais 9^3 contêm o zero e as demais $10^3 - 9^3$ não contêm o zero. Com isso, podemos fazer uma tabela para cruzar as informações das letras e dos algarismos:

	com letra O	sem letra O
com zero	Não	OK
sem zero	OK	OK

Nesse caso, a contagem pode ser feita de vários modos. Uma maneira é contar todos os casos e descontar os que não interessam, ou seja, sendo A o conjunto dos pares $(seq\_letras, seq\_algarismos)$ e B, dos pares $(seq\_letras\_com\_O, seq\_algarismos\_com\_zero)$, queremos

$$|A \setminus B| = |A| - |B| = 26^3 \cdot 10^3 - (26^3 - 25^3) \cdot (10^3 - 9^3).$$

Em problemas com "... pelo menos um..." costuma ser mais fácil contar todas as possibilidades e depois eliminar as possibilidades indesejadas.

Exemplo 6. *Qual é a probabilidade de que um número inteiro positivo menor do que 1000 tenha pelo menos um algarismo 1 em sua representação decimal?*

Solução: Há 999 inteiros positivos menores do que 1000. Desses, contemos os que não têm algarismo 1: há 8 de um algarismo (2 a 9), $8 \cdot 9$ de dois algarismos (8 possibilidades para o algarismo das dezenas − lembre-se, número não começa com zero! − e 9 para o algarismo das unidades) e $8 \cdot 9 \cdot 9$ de três algarismos. Assim, sendo A o conjunto dos números inteiros menores do que 1000 e A_i o conjunto dos números inteiros de i algarismos sem 1 na sua representação decimal, queremos

$$|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) = 999 - 8 - 8 \cdot 9 - 8 \cdot 9 \cdot 9 = 271,$$

de modo que a probabilidade pedida é $\frac{271}{999}$.

Exemplo 7. *Mariana tem tinta guache de 8 cores diferentes e quer pintar os quatro quadradinhos unitários de um quadrado de lado 2 de modo que casas que têm um lado comum tenham cores diferentes. De quantas maneiras ela pode fazer isso? Duas colorações são iguais se uma pode ser obtida a partir de outra através de uma rotação.*

Solução: De acordo com o enunciado, as quatro pinturas a seguir devem ser consideradas iguais:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline C & A \\ \hline D & B \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline D & C \\ \hline B & A \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline B & D \\ \hline A & C \\ \hline\end{array}$$

Então o problema é simples: basta tomar o total, 8^4, e dividir por 4: $8^4/4 = 1024$. Certo?

Errado! Imagine se fossem 7 cores; o total seria então $7^4/4$, que não é inteiro. Onde está o erro?

O erro não está na multiplicação 8^4: de fato, queremos contar as quádruplas (A, B, C, D) e tirar as repetições, já que (A, B, C, D), (C, A, B, D), (D, C, B, A) e (B, D, A, C) devem ser consideradas iguais. O problema é que nem sempre dividimos por 4. Existem situações em que dividimos por 2 ou nem dividimos (ou seja, não há repetições). Veja os exemplos:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline B & A \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline B & A \\ \hline A & B \\ \hline\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline A & A \\ \hline A & A \\ \hline\end{array}$$

Quando ocorre cada caso? Basta observar os quatro casos

A	B		C	A		D	C		B	D
C	D		D	B		B	A		A	C

e verificar quando ocorre repetição. Os dois primeiros sõa iguais quando $A = C$, $B = A$, $D = B$ e $C = D$, ou seja, quando as quatro cores são iguais. Nesse caso, os quatro são iguais, e não precisamos dividir. De fato, se dois vizinhos são iguais todas as quatro cores são iguais. Agora, se o primeiro e o terceiro são iguais, $A = D$ e $B = C$. Se $A = B$, obtemos o caso anterior, então $A \neq B$.

Então acontece que só os dois casos que listamos se repetem menos (uma ou duas vezes). Assim, há 8 possibilidades que não se repetem e $8 \cdot 7$ (8 escolhas para A, 7 para B) que representam duas repetições. As demais $8^4 - 8 - 8 \cdot 7$ são repetições de quatro vezes. Com isso, o total é

$$8 + \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{8^4 - 8 - 8 \cdot 7}{4} = 1044.$$

Observação: Só para ter certeza: se fossem 7 cores, o total seria

$$7 + \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{7^4 - 7 - 7 \cdot 6}{4} = 637.$$

Um inteiro!

Problemas

Agora tente esses problemas. Lembre-se:

- Defina bem o conjunto que você quer contar;
- Tome cuidado para não esquecer de contar algum elemento ("Falta alguém?") ou contar repetido ("Contei alguém duas vezes?");
- Sempre que possível, faça a divisão em casos com conjuntos disjuntos;
- Seja *extremamente* organizado;
- Tenha em mente que há várias maneiras de se fazer uma contagem.

1. (OBM) Considere todos os números de três algarismos distintos, cada um igual a 0, 1, 2, 3 ou 5. Quantos desses números são múltiplos de 6?

2. (OBM) Esmeralda escreveu (corretamente!) todos os números de 1 a 999, um atrás do outro:

   $$123456789101112 13\ldots 997998999.$$

   Quantas vezes aparece o agrupamento "21", nesta ordem?

3. Quantos quadrados têm como vértices pontos do quadriculado 10×10?

4. (OBM) Quantos números entre 10 e 13000, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por dígitos consecutivos e em ordem crescente? Exemplificando, 456 é um desses números, mas 7890 não é.

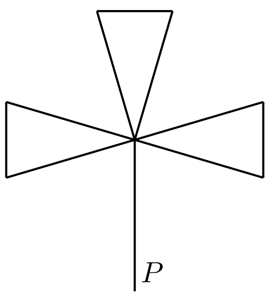
5. (OBM) O piso de um quarto tem forma de um quadrado de lado 4 m. De quantas maneiras podemos cobrir totalmente o quarto com oito tapetes iguais de dimensões 1 m e 2 m?

6. (OBM) Entre treze reais não nulos há mais números positivos do que negativos. Dentre os $\frac{13\times 12}{2} = 78$ produtos de dois dos treze números, 22 são negativos. Quantos números dentre os treze números dados são negativos?

7. (OBM) Um número natural A de três algarismos *detona* um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?

8. (OBM) Um número de quatro dígitos é dito *paladino* se é múltiplo de 9 e nenhum de seus dígitos é nulo. Quantos números paladinos existem?

9. (OBM) De quantas maneiras é possível desenhar a figura a seguir sem tirar o lápis do papel (ou qualquer outro utensílio, se você preferir!) começando de P e sem passar sobre o mesmo ponto mais de uma vez, com exceção do ponto comum aos três triângulos?



10. (OBM) Um número de quatro dígitos é dito *peroba* se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade. Quantos números perobas existem?

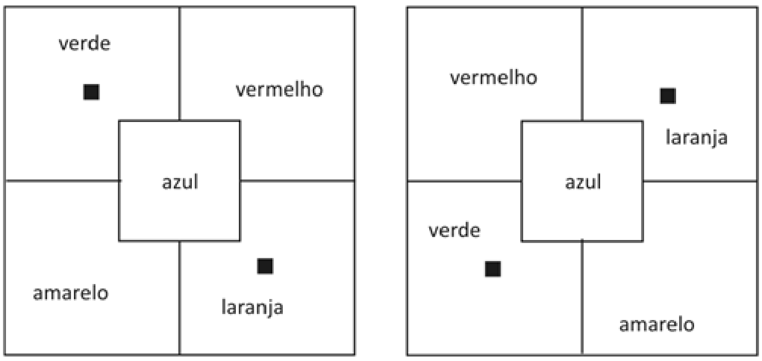
11. (OBM) Quantos números de três algarismos (que não começam com 0) possuem um algarismo que é a média aritmética dos outros dois?

12. (OBM) Cada uma das oito casas de um retângulo de duas linhas e quatro colunas é pintada de uma entre três cores. Uma coluna é chamada de *corte* se as suas duas casas são da mesma cor. De quantas maneiras é possível pintar o retângulo de modo que haja exatamente um corte?

13. (OBM) Colocamos vários palitos sobre uma mesa de modo a formar um retângulo $m \times n$. Devemos pintar cada palito de azul, vermelho ou preto de modo que cada um dos quadradinhos da figura seja delimitado por exatamente dois palitos de uma cor e dois de outra cor. De quantas formas podemos realizar esta pintura?

14. (OBM) Quantas permutações de 1, 2, 3, ..., 9 há com a propriedade de que, para todo $1 \leq i < 9$, os números que aparecem entre i e $i+1$ (onde i pode aparecer tanto antes como depois de $i+1$) são todos menores do que i? Por exemplo, 976412358 é uma permutação com esta propriedade.

15. (OBM) Soninha tem muitos cartões, todos com o mesmo desenho em uma das faces. Ela vai usar cinco cores diferentes (verde, amarelo, azul, vermelho e laranja) para pintar cada uma das cinco partes do desenho, cada parte com uma cor diferente, de modo que não haja dois cartões pintados da mesma forma. Na figura abaixo, por exemplo, os cartões são iguais, pois um deles pode ser girado para se obter o outro. Quantos cartões diferentes Soninha conseguirá produzir?



16. (OBM) Determine a quantidade de números $n = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, de seis algarismos distintos, que podemos formar utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:

    i) $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$;

    ii) n é divisível por 9.

17. (OBM) Um quadrado 4×4 é dividido em 16 quadrados unitários. Cada um dos 25 vértices desses quadrados deve ser colorido de vermelho ou azul. Ache o número de colorações diferentes tais que cada quadrado unitário possua exatamente dois vértices vermelhos.

18. (OBM) Duas pessoas vão disputar uma partida de par ou ímpar. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade.

    Qual é a probabilidade de que a pessoa que escolheu par ganhe?

19. (OBM) Dois cubos têm faces pintadas de ocre ou magenta. O primeiro cubo tem cinco faces ocres e uma face magenta. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor (sim, ocre e magenta são cores!) é 1/2. Quantas faces ocres tem o segundo cubo?

20. (OBM) No programa de auditório Toto Bola, o apresentador Ciço Magallanes dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da plateia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, e de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. A máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro é igual a $\frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros positivos primos entre si. Determine o valor de $m+n$.

21. (OBM) O campeonato Venusiano de futebol é disputado por 10 times, em dois turnos. Em cada turno cada equipe joga uma vez contra cada uma das outras. Suponha que o Vulcano FC vença todas as partidas do primeiro turno. Caso não vença o segundo turno, o Vulcano FC jogará uma final contra o vencedor do segundo turno, na qual terá vantagem caso faça mais pontos que o adversário durante todo o campeonato (vitória vale 3 pontos, empate vale 1 ponto e derrota 0 pontos).

    a) Determine o menor n tal que, se o Vulcano FC fizer exatamente n pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os n pontos).

    b) Determine o menor n tal que, se o Vulcano FC fizer pelo menos n pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os n pontos).

Bibliografia

1. T. Andreescu e Z. Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser 2003.

2. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

3. A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. Pinto Carvalho e P. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM.

4. C. Chuan-Chong e K. Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific 1992.

Respostas, Dicas e Soluções

1. 7: ou termina com 0 (210, 120, 510, 150) ou com 2 (102, 132, 312).

2. 31: 20 com 21 aparecendo em um só número, 11 com 2 em um número e 1 no outro.

3. 825. Você contou os quadrados "tortos"? Conte-os usando o "quadrado circunscrito não torto". Há outra maneiras de organizar.
4. 22. É só contar as quantidades por quantidade de algarismos; não se esqueça do 12345!
5. 36. Vale a pena listar os casos em que o tapete inferior esquerdo é horizontal; depois é só multiplicar por 2.
6. 2. Se x é a quantidade de negativos, $13-x$ são positivos e devemos ter $x(13-x) = 22$.
7. $9 \cdot 8 \cdot 5 = 360$.
8. 9^3. Dado três algarismos, o quarto está definido. Lembre que um número é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos também o é.
9. $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.
10. Os números não perobas são $9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1125$. Assim, o total é $9000 - 1125 = 7875$.
11. $9 \cdot 5 = 45$.
12. $4 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 = 2592$: $(\text{coluna do corte}, \text{cor do corte}, \text{linha } 1, \text{linha } 2)$.
13. $3^{n+m} \cdot 2^{nm}$. Primeiro preencha a fileira horizontal superior, depois preencha os quadradinhos da esquerda para direita, de cima para baixo.
14. $2^8 = 256$. Comece com o 9, depois o 8, então o 7...
15. 30. Não se esqueça de dividir por 4!
16. 240: 192 com soma $a_1 + a_4 = 9$, e 48 com soma $a_1 + a_4 = 12$.
17. 62. Comece com a primeira linha, e há dois casos: se houver dois vértices vizinhos de mesma cor ou não.
18. $\frac{13}{25}$ (sim, não é $\frac{1}{2}$!). Para ver por que, conte os pares (par, par) e $(\text{ímpar}, \text{ímpar})$. Mas não se preocupe: quando o zero participa, a probabilidade volta a ser $\frac{1}{2}$.
19. 3. Na verdade, se houver três de cada cor, não importa a distribuição do outro dado.
20. 33. A probabilidade é $\frac{14}{19}$, com uma caixa com uma única bola verde.
21. a) 23; b) 25. Cheque os casos!