Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 2

Contagens Elementares: Bijeções

Já vimos como fazer contagens de modo preciso com o auxílio de conjuntos. Agora veremos alguns modelos de contagem que facilitam o nosso trabalho. Imagine esses modelos como espécies de "macros".

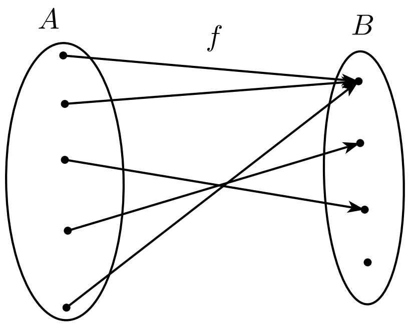
Funções em Combinatória ou Como Conferir sua Contagem

Uma *função* é uma tripla ordenada (A, B, f), em que $f \subset A \times B$ é tal que para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Em termos formais, as seguintes duas condiç eos devem ser satisfeitas:

(i) $(x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$.

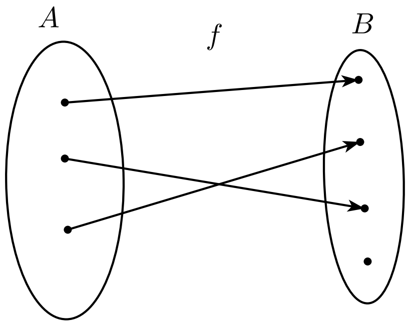
(ii) $\forall x \in A; \exists y \in B : (x, y) \in f$.

Denotamos $f\colon A \to B$ com $(x, y) \in f \iff f(x) = y$ ou, como faremos mais em Combinatória, $x \xrightarrow{f} y$.



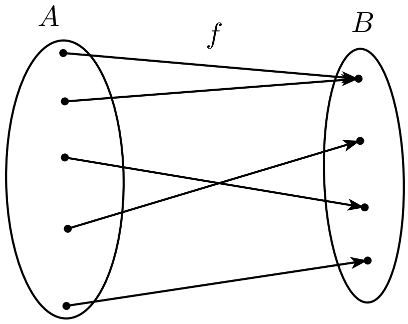
Qual é a importância de funções em Combinatória? As funções fazem associações entre dois conjuntos A e B diferentes, e portanto *transformam um problema de contagem em A em um problema de contagem em B.* Existem três tipos de função que são muito importantes.

Uma função é *injetora* se todo elemento de A está associado a um elemento diferente de B, ou seja, $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Outra maneira de dizer isso é que se $x_1 \xrightarrow{f} y$ e $x_2 \xrightarrow{f} y$ então $x_1 = x_2$. Note que isso é o mesmo que o inverso da condição (i) da definição de função.



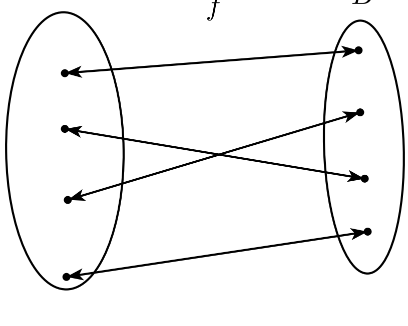
Note que se A e B são conjuntos finitos e existe uma função injetora de A em B então podemos afirmar de $|A| \leq |B|$, pois a cada elemento de A corresponde um elemento diferente de B, e quem sabe sobram elementos em B.

Uma função é *sobrejetora* se todo elemento de B tem um associado em A, ou seja, $\forall y \in B; \exists x \in A : x \stackrel{f}{\to} y$. Note que isso é o mesmo que o inverso da condição (ii) da definição de função.



Note que se A e B são conjuntos finitos e existe uma função sobrejetora de A em B então podemos afirmar de $|A| \geq |B|$, pois a cada elemento de B corresponde pelo menos um elemento de A, e pela definição de função um elemento de A não pode estar associado a dois ou mais elementos de B.

Enfim, uma função é *bijetora* quando é injetora e sobrejetora. Chamamos uma função bijetora também de *bijeção*. Isso quer dizer que os inversos das condições (i) e (ii) da definição devem ser satisfeitas. Note que isso mostra que a *relação inversa* f^{-1} da função $f \colon A \to B$, definida por $f^{-1} \in B \times A$, $(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$ é uma função.



Para denotar que $f(x) = y$ em uma bijeção f, muitas vezes indicamos $x \overset{f}{\leftrightarrow} y$. Quando o contexto deixa clara a bijeção, simplesmente escrevemos $x \leftrightarrow y$.

Mas, mais importante ainda, se A e B são finitos e existe uma bijeção de A em B então $|A| = |B|$. Isso nos leva ao seguinte princípio:

$$\boxed{|A| = |B| \text{ quando existe uma função inversível de } A \text{ em } B.}$$

Por incrível que pareça, você já faz bijeções desde criança. No momento em que você aponta para objetos e pensa "um, dois...", você está fazendo uma bijeção entre o conjunto A dos objetos que você está contando e o conjunto $\{1, 2, \ldots, |A|\}$.

Exemplo 1. *(IME) Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira?*

Solução: O segredo é não se preocupar com onde o carro 1 vai estacionar e colocar os outros. Cada carro, depois do primeiro, estaciona na frente ou atrás da fila. Assim, estabelecelemos uma bijeção entre as configurações e o conjunto $\{\text{frente}, \text{atrás})^{N-1}$. Por exemplo, fazemos a correspondência

$$(\text{atrás}, \text{frente}, \text{frente}, \text{frente}, \text{atrás}, \text{atrás}, \text{atrás}, \text{frente}, \text{atrás}) \leftrightarrow (10, 8, 7, 6, 2, 1, 3, 4, 5, 9)$$

Note que essa correspondência é claramente inversível: basta observar a posição do 2 em relação ao 1, depois observar a posição do 3 em relação ao grupo formado por 1 e 2, e assim por diante, observando a posição entre o i e o grupo formado por $1, 2, \ldots, i-1$.

Logo o total pedido é $|\{\text{frente}, \text{atrás})^{N-1}| = 2^{N-1}$.

Então, para conferir uma contagem, basta:

- Definir com clareza a associação que você fizer entre conjuntos.
- Encontrar a inversa dessa associação e mostrar que é uma função.

Alguns Paradigmas de Contagem

Permutações

Permutar n objetos é o mesmo que *ordená-los*. Também dizemos que uma *permutação* de um conjunto A de n elementos é uma n-upla ordenada $(a_1, \ldots, a_n)$ em que cada elemento de A aparece uma única vez. Podemos definir também permutação como uma bijeção de A em A.

De quantas maneiras podemos ordenar n objetos? Ou, em outras palavras, quantas são as suas permutações?

Lema 1. *Há $n!$ maneiras de se permutar n objetos.*

Demonstração: Basta fazer uma bijeção entre as permutações e o conjunto

$$A = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n-1\} \times \{1, 2, \ldots, n-2\} \times \cdots \times \{1, 2\} \times \{1\}.$$

Note que A é um conjunto de n-uplas ordenadas. Primeiro, numere os objetos de 1 a n. A primeira coordenada do elemento de A é o primeiro objeto; para cada nova coordenada, elimine os objetos já na fila e renumere-os na ordem crescente, e coloque na coordenada o novo número. Essa correspondência é uma bijeção, e com isso a quantidade de permutações é $|A| = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Observe a bijeção para $n = 3$:

$$\begin{aligned}
(1,2,3) &\leftrightarrow (1,1,1)\\
(1,3,2) &\leftrightarrow (1,2,1)\\
(2,1,3) &\leftrightarrow (2,1,1)\\
(2,3,1) &\leftrightarrow (2,2,1)\\
(3,1,2) &\leftrightarrow (3,1,1)\\
(3,2,1) &\leftrightarrow (3,2,1)
\end{aligned}$$

Permutações Circulares

Permutação circular é uma permutação de objetos colocados em círculo, de modo que ao girarmos o círculo obtemos a mesma permutação circular. Por exemplo, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ e $(3, 1, 2)$ representam a mesma permutação circular.

Lema 2. *Há $(n-1)!$ permutações circulares de n objetos.*

Demonstração: Basta mostrar que cada permutação circular corresponde a n permutações. Mas para isso, basta escolher um dos elementos da permutação para ser o primeiro elemento da permutação. Ou seja, fazemos a bijeção

$$(\text{permutação circular}, \text{início}) \leftrightarrow \text{permutação}$$

Com isso, sendo k a quantidade de permutações circulares, $k \cdot n = n! \iff k = (n-1)!$.

Permutações com Repetições ou Anagramas

Quando temos objetos repetidos, o número de permutações muda. Uma maneira simples de ver permutações com objetos repetidos é associar a cada tipo de objeto um símbolo, e contar o número de permutações desses símbolos. Essas permutações são chamadas *anagramas*, e também são vistas como anagramas de palavras. Por exemplo, ROMA é anagrama de AMOR, CABANA é anagrama de BACANA, ANAGRAMA é anagrama de AMAGRANA e IRACEMA é anagrama de AMERICA (para quem gosta de Literatura: há críticos literários que acreditam que esse último anagrama é intencional).

Lema 3. *O número de anagramas com a_i símbolos do tipo i, $1 \le i \le n$, é $\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)!}{a_1!\,a_2!\cdots a_n!}$.*

Demonstração: Antes de fazer a demonstração em si, vamos ver um exemplo: calculemos a quantidade de anagramas da palavra BANANA. Para tanto, vamos colocar índices nas letras repetidas: B_1, A_1, A_2, A_3, N_1 e N_2. Há 6! permutações de letras **com índice**. Mas note que, por exemplo, o anagrama NABAAN pode ser representado por $N_2A_3B_1A_1A_2N_1$ ou $N_1A_1B_1A_3A_2N_2$, ou seja, podemos permutar os índices dentro de cada letra como quiser. Assim, podemos montar uma permutação com índice através de um anagrama e permutações de cada índice. Em outras palavras, fazemos a bijeção

$$\text{permutação} \leftrightarrow (\text{anagrama}, \text{ordem dos Bs}, \text{ordem dos As}, \text{ordem dos Ns})$$

Em particular,

$$N_2A_3B_1A_1A_2N_1 \leftrightarrow (\text{NABAAN}, (1), (3,1,2), (2,1))$$

Note que a função está bem definida, e a sua inversa também é uma função: basta tomar o anagrama e numerar os Bs, os As e os Ns na ordem da permutação.

Logo, sendo m a quantidade de anagramas de BANANA,

$$6! = m \cdot 1! \cdot 3! \cdot 2! \iff m = \frac{6!}{1!\,3!\,2!}.$$

Essa ideia é facilmente generalizada: sendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ os símbolos, fazemos a bijeção

$$\text{permutação} \leftrightarrow (\text{anagrama}, \text{ordem dos } A_1\text{s}, \text{ordem dos } A_2\text{s}, \ldots, \text{ordem dos } A_n\text{s})$$

e o resultado segue.

Combinações

Esse é um dos paradigmas de contagem mais úteis: ele conta o número de maneiras de escolher k entre n objetos ou, mais formalmente, o número de subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

Lema 4. *Um conjunto de n elementos tem $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ subconjuntos de k elementos.*

Demonstração: Vamos transformar cada subconjunto de k elementos em um código. Primeiro, numere os elementos de 1 a n. Em seguida, associe a cada elemento a letra S se ele pertence ao subconjunto e a letra N se não pertence. Por exemplo, se o conjunto é $\{1,2,3,4,5\}$ e o subconjunto é $\{1,2,4\}$, usamos (S,S,N,S,N). Isso é claramente uma bijeção: podemos obter o código a partir do subconjunto, e a partir do código se recupera imediatamente o subconjunto.

Assim, o número de subconjuntos de k entre n elementos é igual ao número de códigos com k letras S e $n-k$ letras N, ou seja, é o número de anagramas com k S's e $n-k$ N's, que é

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Observação 1. *Por causa da natureza combinatória dos binomiais, há várias identidades envolvendo binomiais, que podem ser provadas com bijeções:*

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$;
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ *(fórmula da absorção);*
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *(relação de Stifel);*
- $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$;
- $\binom{m}{0} \cdot \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \cdot \binom{n}{p-1} + \binom{m}{2} \cdot \binom{n}{p-2} + \cdots + \binom{m}{p} \cdot \binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$.

Tente prová-las!

Número de Soluções de Equação Linear

É possível contar, com uma bijeção, o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Lema 5. *O número de soluções da equação*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

com $x_i \in \mathbb{Z}$ *e* $x_i \geq 0$ *é* $\binom{n+k-1}{n}$.

Demonstração: Considere que temos n objetos idênticos para serem distribuídos entre k cestas numeradas entre 1 e k. Sendo x_i o número de objetos na cesta i, temos x_i inteiro não negativo e $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Ou seja, o número de soluções da equação dada é igual ao número de maneiras de distribuir os objetos nas cestas. Para isso, representamos os objetos por $\circ$ e as divisórias entre cestas por $|$. Por exemplo,

$$\circ \circ | \circ || \circ \leftrightarrow (2, 1, 0, 1),$$

ou seja, 2 objetos na cesta 1, 1 na cesta 2, nenhum na cesta 3 e 1 na cesta 4.

Temos n objetos ($\circ$) e $k-1$ divisórias $|$, então o número de soluções é igual ao número de anagramas com n $\circ$s e $k-1$ $|$s, que é $\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n}$.

Exercícios Resolvidos

É claro que você pode misturar todas as técnicas vistas até aqui, incluindo os princípios aditivo e multiplicativo. Além disso, am alguns problemas, não explicitaremos as bijeções. Fica como tarefa encontrar e provar as bijeções.

Exemplo 2. *De quantas maneiras podemos colocar 4 livros de literatura, 3 livros de história, 5 livros de matemática e 2 livros de música em uma estante, sendo que os livros de cada assunto devem ficar juntos?*

Solução: Permutamos os livros dentro de cada assunto e depois permutamos os quatro assuntos. Fazemos a bijeção

$$\text{distribuição} \leftrightarrow$$
$$(\text{ordem literatura}, \text{ordem história}, \text{ordem matemática}, \text{ordem música}, \text{ordem assuntos})$$

Note que dada uma distribuição obtemos as ordens de cada assunto e a ordem entre assuntos e, reciprocamente, dadas as ordens obtemos a distribuição. Com isso, a resposta é $4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 4! = 829440$.

Exemplo 3. *De quantas maneiras podemos colocar* 20 *pessoas em uma roda gigante com* 10 *lugares, cada um para duas pessoas, se:*

(a) a ordem dentro de cada lugar é relevante?

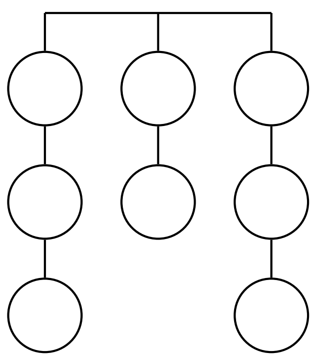
(b) a ordem dentro de cada lugar não é relevante?

Solução: Primeiro colocamos as pessoas em fila, para o qual há 20! possibilidades.

(a) Se a ordem é relevante, dividimos a fila em 10 pedaços de 2, de acordo com a ordem (note que só há uma possibilidade de fazer isso!). Mas os 10 lugares estão em círculo, e portanto dividimos o resultado por 10: $\frac{20!}{10} = 2 \cdot 19!$.

(b) Se a ordem não é relevante, basta dividir por $2! = 2$ em cada lugar, obtendo $\frac{2 \cdot 19!}{2^1 0} = \frac{19!}{2^9}$. Outra maneira de se enxergar isso é considerar anagramas com dez símbolos, um para cada lugar, dois símbolos de cada tipo.

Exemplo 4. *Em um torneio de tiro, oito alvos são dispostos em três colunas penduradas, como mostra a figura. Cada competidor deve atirar nos alvos da seguinte forma: ele escolhe primeiro uma das três colunas e atira no alvo mais baixo que ele ainda não acertou. Em quantas ordens os oito alvos podem ser acertados?*



Solução: Considere a ordem das escolhas: sendo A, B e C as colunas, da esquerda para a direita, uma ordem possível é $AABBACCC$. Note que a escolha da coluna já determina a escolha do alvo. Com isso, queremos contar o número de anagramas de $AAABBCCC$, que é $\frac{8!}{3!\,2!\,3!} = 560$.

Exemplo 5. *Numa classe há 5 garotas e 9 rapazes. O professor quer tirar uma foto de todos os estudantes em fila, de modo que as garotas apareçam em ordem crescente de altura e os rapazes, em ordem decrescente de altura. De quantas maneiras podemos fazer as filas? Os rapazes não precisam ficar todos juntos, e nem as garotas.*

Solução: Basta escolher as posições das garotas na fila. Feito isso, as posições dos rapazes estão definidas, e as ordem entre as garotas e entre os rapazes está pre-estabelecida. Com isso, o total é $\binom{5+9}{5} = 2002$.

Exemplo 6. *Sejam m e n inteiros positivos. Quantas funções $f\colon \{1,2,3,\ldots,m\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ são não decrescentes, ou seja, $f(i) \le f(j)$ para todo $1 \le i < j \le m$?*

Uma solução: Para facilitar a notação, seja $a_i = f(i)$, de modo que queremos determinar a quantidade de sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m \le n$. Uma maneira de lidar com desigualdades $a \le b$ é considerar $b - a \ge 0$. Então, sejam $x_0 = a_1 - 1$, $x_1 = a_2 - a_1$, $x_2 = a_3 - a_2$, $\ldots$, $x_m = n - a_m$. Então $x_i \ge 0$, $0 \le i \le m$ e $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m = (a_1 - 1) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (n - a_m) = n - 1$. Além disso, note que os x_i's determinam unicamente $a_1, a_2, \ldots, a_m$, ou seja, temos uma bijeção (verifique!). Logo o total de funções é o número de soluções de $x_0+x_1+x_2+\cdots+x_m = n-1$, que é $\binom{n-1+m}{m}$.
Outra solução: Utilize a mesma notação da solução anterior, e seja $b_i = a_i + i - 1$, Então $b_i - b_{i-1} = (a_i + i - 1) - (a_{i-1} + i - 2) = a_i - a_{i-1} + 1 \ge 1$, e portanto, estabelecemos uma bijeção entre $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ com $1 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_m \le n + m - 1$. Mas para determinar os b_i's, basta escolher m entre os números $1, 2, \ldots, n+m-1$, ou seja, há $\binom{n-1+m}{m}$ funções.

Exemplo 7. *(IME) Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa, nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.*

Solução: Suponha que escolhemos os cinco cavaleiros. Seja x_i, $1 \le i \le 5$ o número de cavaleiros entre o cavaleiro escolhido i e o cavaleiro escolhido $i+1$ (sendo o cavaleiro 6 igual ao cavaleiro 1). Como 7 cavaleiros não foram escolhidos, devemos achar as soluções de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$ com $x_i \ge 1$. Mas só sabemos a fórmula para $x_i \ge 0$! Isso é fácil de consertar: seja $x_i = y_i + 1$. Então $y_i \ge 0$, e temos $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 2$. Há, então $\binom{2+4}{2} = 15$ soluções.

Só a solução não serve para identificar os cinco cavaleiros; ela indica só os intervalos entre cavaleiros. Para ajeitar isso, basta escolher um dos doze cavaleiros e pular os intervalos, e o total é $12 \cdot 15 = 180$. Certo?

Errado! Numere os cavaleiros de 1 a 12 e considere a escolha 1, 3, 6, 8, 10. A nossa contagem é de pares $((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \text{cavaleiro})$. Agora, considere $((1,2,1,1,2),1)$ e $((2,1,1,2,1),3)$. Se você olhar com atenção, vai perceber que ambos os pares geram a escolha 1, 3, 6, 8, 10. Então estamos contando com repetição.

O motivo é simples: ao tentar inverter a "bijeção", não é possível escolher o cavaleiro no par $((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \text{cavaleiro})$. Ou seja, a correspondência que fizemos não é uma bijeção, pois não conseguimos definir a inversa. De fato, os pares geram cinco cavaleiros e ainda elege um deles (imagine, por exemplo, que ele é o líder do grupo). Aí sim temos uma bijeção, e sua inversa: tome o líder e escolha os demais cavaleiros de acordo com $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Mas de cada escolha podemos gerar cinco líderes, então basta tomar o resultado obtido anteriormente e dividir por 5: o total é $\frac{180}{5} = 36$.

Fica a lição: **na dúvida, cheque a bijeção!**

Observação 2. *Generalizando para n cavaleiros e k escolhidos, o total é $\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$. Problemas semelhantes a esse foram estudados por Kaplansky, e esse resultado é o* segundo lema de Kaplansky.

Exemplo 8. *Uma excursão com 100 pessoas precisa comprar passagens de ônibus. Para isso, dirigem-se à bilheteria, que tem cinco guichês, cada um com sua própria fila. De quantas maneiras as pessoas podem se organizar nessas filas? Todas as distribuições são permitidas (por exemplo, incluem-se aí as 100! maneiras de se colocar todos em uma única fila, do primeiro guichê).*

Solução: Basta colocar as 100 pessoas em fila e colocar, nessa fila, quatro divisórias, indicando em que fila devem ir. Por exemplo, toda sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_{100}, ||||)$ indica o exemplo no enunciado (é possível inverter essa associação?). Com isso, devemos contar o número de anagramas com 101 símbolos, sendo um deles $(|)$ repetido 4 vezes. Assim, o total é $\frac{104!}{(1!)^{100} \cdot 4!} = \frac{104!}{24}$.

Exemplo 9. *Há n carros, numerados de 1 a n, e uma fileira com n lugares para estacionar, numerados de 1 a n. Cada carro i tem seu lugar favorito a_i; quando vai estacionar, se dirige ao seu lugar favorito; se ele está livre estaciona ali, caso contrário, avnça para o primeiro lugar livre e estaciona; se não encontra lugar livre, vai embora e não volta mais. Quantas sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ existem tais que todos os n carros conseguem estacionar?*

Solução: Vamos listar alguns casos pequenos para entender o que está acontecendo:

Para $n = 1$, só há, é claro, uma possibilidade: (1).

Para $n = 2$, só não dá certo $(2, 2)$. As outras três $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(1, 1)$ dão certo.

Vejamos $n = 3$. As seis permutações $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$ obviamente dão certo. Além disso, note que algum carro deve ter 1 como vaga favorita, senão todos os carros passarão direto pela vaga 1 e algum deles não vai estacionar. As outras possibilidades são $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, que funcionam, e $(1, 3, 3)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 3, 1)$ que não funcionam, além das outras $2^3 = 8$ que não contêm 1. Note que já lista todas as $3^3 = 27$ possibilidades. Com isso, o total é 16.

Trabalhemos agora com $n = 4$. São $4^4 = 256$ possibilidades, então não vale a pena listar todos, ou seja, precisamos de alguma estratégia de contagem. Contemos por quantidade de uns. Já temos $3^4 = 81$ possibilidades que não funcionam (as que não tem 1). Além disso, é fácil ver que $(1, 1, 1, k)$ funciona. Com isso, temos $(1, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, k)$ com $k = 2, 3, 4$ e permutações, que são mais $1 + 4 \cdot 3 = 13$ possibilidades que funcionam. Os que têm exatamente dois uns só não funcionam se são $(1, 1, 4, 4)$ ou permutações. Mais $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$ que não funcionam e $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 6 = 48$ que funcionam. Entre os $4 \cdot 3^3 = 108$ que só têm um

1, retiramos o 1 (esse carro com certeza vai conseguir estacionar) e subtraímos 1 de cada outro número, e é possível estacionar se, e somente se, a sequência de três termos é válida. Com isso, temos $4 \cdot 16 = 64$ possibilidades que funcionam. O total é $13 + 48 + 64 = 125$.

Vejamos: se x_n é a quantidade pedida, temos $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 16 = 4^2$ e $x_4 = 125 = 5^3$. Parece que $x_n = (n+1)^{n-1}$, ou seja, a gente deve conseguir uma bijeção das sequências com $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^{n-1}$. Mas aí temos que conseguir uma associação entre sequências com n termos e sequências com $n-1$ termos, o que não parece ser interessante. Talvez seja mais fácil conseguir uma bijeção entre (sequência, k), $1 \le k \le n+1$ e $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^n$.

Vamos pensar em $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^n$ primeiro. Considere então uma nova vaga $n+1$, e as regras continuam as mesmas. Uma ideia que facilita a divisão por $n+1$ é considerar permutações cíclicas, ou seja, vamos supor que as vagas estão em círculo. Desse modo, com as mesmas regras, todos os carros estacionam (por estarem em círculo, sempre aparece uma vaga livre!), e sobra uma vaga livre no final. Por simetria, há $\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1}$ configurações com i sendo a vaga livre, $1 \le i \le n+1$. Afirmamos que uma configuração corresponde a uma sequência válida se, e somente se, a vaga livre é $n+1$.

De fato, se a sequência é válida, os carros nunca chegam a precisar da vaga $n+1$, e ela nunca chega a ser usada. Reciprocamente, se a vaga livre é $n+1$, nenhum carro listou $n+1$ como vaga favorita no novo processo e, mais ainda, $n+1$ nunca foi usada como vaga livre, ou seja, nenhum carro passa da vaga n, o que significaria que ele iria embora. Logo o problema está terminado (de fato, a bijeção é feita entre sequências válidas e não válidas e $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^n$, sendo que a sequência é válida se, e somente se, a vaga que sobra é $n+1$).

Problemas

1. (OBM) Quantos números inteiros entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números deste tipo; 52 e 566 não).

2. (OBM) Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

3. (OBM) Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo baralharam as 52 cartas de um baralho e distribuíram 13 cartas para cada um. Arnaldo ficou surpreso: “Que estranho, não tenho nenhuma carta de espadas.” Qual a probabilidade de Bernardo também não ter cartas de espadas?

4. (OBM) De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

$$\_\,\_ > \_\,\_ > \_\,\_$$

5. (OBM) Esmeralda tem cinco livros sobre heráldica em uma estante. No final de semana, ela limpou a estante e, ao recolocar os livros, colocou dois deles no lugar

onde estavam antes e os demais em lugares diferentes de onde estavam. De quantas maneiras ela pode ter feito isso?

6. (OBM) Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos? (Obs.: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas.)

7. (OBM) Um clube de tênis tem n jogadores canhotos e $2n$ jogadores destros e, ao todo, há menos do que 20 jogadores. No último campeonato interno, no qual cada jogador enfrentou cada um dos outros jogadores do clube exatamente uma vez, a razão entre o número de jogos vencidos por jogadores canhotos e o número de jogos vencidos por jogadores destros foi $3 : 4$.

   Qual é o valor de n?

8. (OBM) Seja n inteiro positivo. De quantas maneiras podemos distribuir $n + 1$ brinquedos distintos para n crianças de modo que toda criança receba pelo menos um brinquedo?

9. (OBM) Dizemos que uma palavra Q é *quase-anagrama* de outra palavra P quando Q pode ser obtida retirando-se uma letra de P e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que P. Um quase-anagrama pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, RARO, RACR e ARCO são quase-anagramas de CARRO. Quantos são os quase-anagramas da palavra BACANA que começam com A?

10. (OBM) Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita alternada quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Por exemplo, EZEQAF, MATEMÁTICA, LEGAL e ANIMADA são palavras alternadas, mas DSOIUF, DINHEIRO e ORDINÁRIO não são. Quantos anagramas da palavra FELICIDADE (incluindo a palavra FELICIDADE) são sequências alternadas?

11. (OBM) O matemático excêntrico Jones, especialista em Teoria dos Nós, tem uma bota com n pares de furos pelos quais o cadarço deve passar. Para não se aborrecer, ele gosta de diversificar as maneiras de passar o cadarço pelos furos, obedecendo sempre às seguintes regras:

    - o cadarço deve formar um padrão simétrico em relação ao eixo vertical;
    - o cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;
    - o cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar diretamente (isto é, sem passar por outros furos) os dois furos inferiores.

    Determine, em função de $n \geq 2$, o número total de maneiras de passar o cadarço pelos furos obedecendo às regras acima.

12. (OBM) Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

13. (OBM) Determine a quantidade de funções $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ tais que $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \{1,2,3,4,5\}$.

14. (OBM) Ao jogarmos uma certa quantidade de dados cúbicos com faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de obtermos soma dos pontos 2006 é igual à probabilidade de obtermos soma dos pontos S. Qual é o menor valor possível de S?

15. (OBM) Definimos o *diâmetro* de um subconjunto não vazio de $\{1, 2, \ldots, n\}$ como a diferença entre seu maior elemento e seu menor elemento (em módulo).

    Calcule a soma dos diâmetros de todos os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

16. Prove que todos os conjuntos a seguir têm a mesma quantidade de elementos:

    - o conjunto de filas com $2n$ pessoas, n com notas de 10 reais, n com notas de 20 reais, em um cinema cuja entrada é 10 reais e o caixa não tem troco no início da fila e o caixa sempre consegue troco para quem está na fila;
    - o conjunto de n pares de parêntesis, de modo que é possível abrir e fechar parêntesis;
    - o conjunto das maneiras de multiplicar $n+1$ números, multiplicando dois números de cada vez;
    - o conjunto das maneiras de cortar um $(n+2)$-ágono convexo em n triângulos conectando alguns de seus vértices;
    - o conjunto das maneiras de cortar uma escada de altura n em n retângulos;

17. Seja A o conjunto das permutações p de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $p \circ p$ é a identidade (ou seja, sendo p uma bijeção tem-se $p(p(i)) = i$ para todo i, $1 \le i \le n$). Seja B o número de permutações no mesmo conjunto tais que, para todo k, $1 \le k \le n-2$, $p(k) \ge p(k+1)$ ou $p(k) \ge p(k+2)$. Prove que $|A| = |B|$.

Bibliografia

1. T. Andreescu e Z. Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser 2003.

2. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

3. A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. Pinto Carvalho e P. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM.

4. C. Chuan-Chong e K. Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific 1992.

Respostas, Dicas e Soluções

1. $\binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 120$.

2. $\binom{6}{2} = 15$ (basta escolher as posições originais dos uns).

3. Há $\binom{39}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}$ possibilidades, e dessas $\binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}$ funcionam, de modo que a probabilidade é $\frac{\binom{26}{13}}{\binom{39}{13}} = \frac{(26!)^2}{13!\,39!}$.

4. $\binom{6}{3} \cdot 3! = 120$. Pense primeiro no algarismo das dezenas.

5. $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$. Há só duas maneiras de guardar três livros A, B, C fora de ordem: BCA e CAB.

6. $\frac{35!}{5}$. Compare as possibilidades em que Arnaldo fica na frente com as em que Bernaldo fica na frente, etc.

7. $\frac{\binom{n}{2}+x}{\binom{2n}{2}+n\cdot 2n-x} = \frac{3}{4} \iff x = \frac{10n^2-n}{7}$. Esse valor de x só pode ser inteiro se $n = 5$ (lembre que $3n < 20 \iff n \le 6$.

8. $n \cdot \binom{n+1}{2} \cdot (n-1)! = n \cdot \frac{(n+1)!}{2}$.

9. $4! + 3 \cdot \frac{4!}{2!} = 60$. Divida os casos por letra retirada.

10. $2 \cdot \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,2!} \cdot \frac{5!}{2!\,1!\,2!} = 3600$.

11. $(n-2)! \cdot 2^{n-1}$. Permute os pares de furo e depois decida se na hora de ir para um furo para outro se muda de lado do cadarço ou não, ou seja, considere os pares da forma $(\text{permutação}, \{\text{muda}, \text{não muda}\}^{n-1})$.

12. $\frac{1}{7}\binom{12}{6} = \frac{1}{6}\binom{12}{5} = 132$ (há mais de uma maneira de fazer a contagem, mas todas envolvem alguma divisão).

13. $1 + \binom{5}{1} \cdot 4 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot 2^3 + \binom{5}{4} \cdot 1^4 = 196$. Conte por quantidade de pontos fixos da função (isto é, valores a tais que $f(a) = a$; note que de $f(f(x)) = f(x)$ então $f(x)$ é ponto fixo, ou seja, todo elemento da imagem da f é ponto fixo).

14. 339. Sendo n a quantidade de dados, faça uma bijeção entre $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(7 - a_1, 7 - a_2, \ldots, 7 - a_n)$.

15. $\sum_{k=1}^{n} k(2^{k-1} - 2^{n-k}) = (n-3)2^n + n + 3$. De quantos conjuntos k é o maior elemento? E o menor?

16. Bijeções! Pessoa com nota de 10/20 reais$\leftrightarrow$Abre/fecha parêntesis$\leftrightarrow$Inserir fatores de multiplicação$\leftrightarrow$Numere os lados, exceto um deles, e associe a cada diagonal traçada o produto de dois lados já conhecidos, e o lado não numerado dá a ordem de multiplicação. Além disso, par de parêntesis está dentro de outro$\leftrightarrow$retângulo correspondente está apoiado no retângulo correspondente.

17. Mais uma bijeção. Como $p(p(i)) = i$, toda permutação de A deixa alguns pontos fixos (ou seja, $p(i) = i$) ou tem ciclos de tamanho 2 (ou seja, $p(i) = j$ e $p(j) = i$, $i \neq j$). Escreva os pontos fixos e ciclos com os ciclos com os números em ordem decrescente e depois os ciclos e pontos fixos em ordem crescente do primeiro termo. Por exemplo, sendo $(5, 3, 2, 4, 1)$ uma permutação p, temos $p(1) = 5$ e $p(5) = 1$, $p(2) = 3$ e $p(3) = 2$ e $p(4) = 4$, ou seja, temos os ciclos $\begin{pmatrix}5 & 1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}$ e o ponto fixo (4). Escrevemos na ordem $\begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}(4)\begin{pmatrix}5 & 1\end{pmatrix}$. Agora, ignore os parêntesis. Obtém-se um elemento de B (por quê?). A função "ignorar parêntesis" é bem definida e é inversível (verifique).