Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 3

Contagem Dupla

Essa é uma das habilidades mais importantes da Combinatória. Vamos treiná-la!

Contando/calculando de duas maneiras

Vamos praticar algo que você já fez várias vezes: calcular algo de duas maneiras. De fato, quando você resolve os probleminhas para montar equação (tipo, "o quadrado de um número é igual à sua metade"), você calcula algo de duas maneiras ("o quadrado de um número x e a sua metade" é x^2 e $x/2$, e obtemos $x^2 = x/2$). Só que agora vamos fazer isso com contagem. Ou seja, vamos contar algo de duas maneiras e igualar.

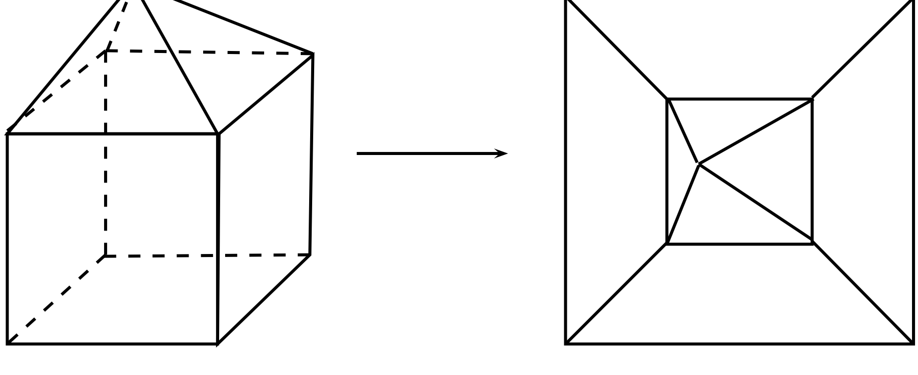
Exemplo 1. *Em um comitê, cada membro pertence a exatamente três subcomitês e cada subcomitê tem exatamente três membros. Prove que a quantidade de membros é igual à quantidade de subcomitês.*

Resolução: Seja n a quantidade de membros do comitês e m a quantidade de subcomitês. A quantidade de pares (membro, subcomitê) em que o membro pertence ao subcomitê é igual a $3n$ (n membros, 3 subcomitês para cada membro) e a $3m$ (m subcomitês, 3 membros para cada subcomitê). Assim o total de pares é igual a $3n$ e $3m$. Logo $3n = 3m \iff n = m$.

Exemplo 2. *(Teorema de Euler) Um* poliedro *é um sólido delimitado por polígonos. Sejam V, A e F as quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Prove que*

$$V - A + F = 2.$$

Resolução: Tome um poliedro e "abra-o", obtendo uma figura em que todas as faces estão contidas em uma das faces.



Calculemos de duas maneiras a soma S de todos os ângulos internos do poliedro "esticado". Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_F$ as quantidade de arestas/vértices em cada uma das faces, sendo n_1 a quantidade correspondente à face que delimita todas as outras. Então, lembrando que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2)\cdot 180^\circ$, somando por faces temos

$$S = (n_2-2)\cdot 180^\circ + (n_3-2)\cdot 180^\circ + \cdots + (n_F-2)\cdot 180^\circ = (n_2+n_3+\cdots+n_F)\cdot 180^\circ - 2(F-1)180^\circ$$

Contado por vértices, temos que cada um dos $V - n_1$ vértices no interior da face contribuem com 360° e os demais, com a soma dos ângulos internos da face externa, de modo que

$$S = (V - n_1)\cdot 360^\circ + (n_1 - 2)\cdot 180^\circ = (V-1)\cdot 360^\circ - n_1 \cdot 180^\circ$$

Igualando nossas duas somas obtemos

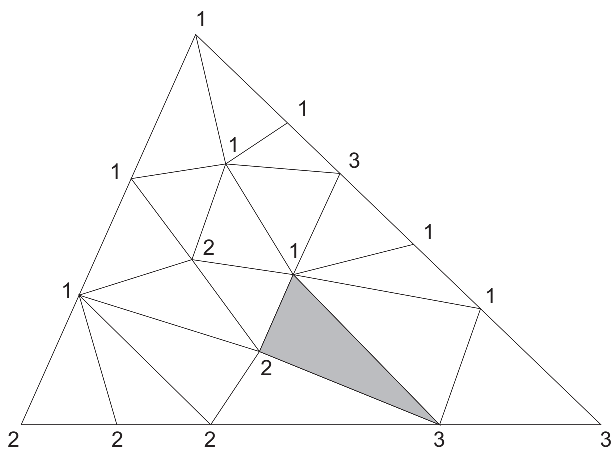
$$\begin{aligned} & (n_2 + n_3 + \cdots + n_F)\cdot 180^\circ - 2(F-1)180^\circ = (V-1)\cdot 360^\circ - n_1\cdot 180^\circ \\ \iff & 2V - (n_1 + n_2 + \cdots + n_F) + 2F = 4 \end{aligned}$$

Enfim, note que a soma $n_1 + n_2 + \cdots + n_F$ pode ser interpretada como a quantidade de arestas. Como cada aresta pertence a exatamente duas faces, cada aresta está sendo contada duas vezes, de modo que $n_1 + n_2 + \cdots + n_F = 2A$. Logo

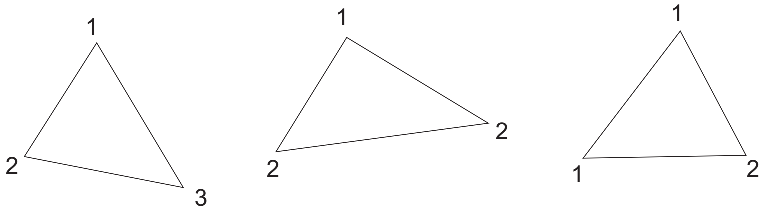
$$2V - 2A + 2F = 4 \iff V - A + F = 2.$$

Veja que o que deve ser contado duas vezes é algo que inter-relaciona as quantidades que queremos serem iguais. Mas nem sempre isso é muito claro.

Exemplo 3. *(Lema de Sperner) Dividimos um triângulo grande em triângulos menores de modo que qualquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm vértice em comum, ou têm um lado (completo) em comum. Os vértices do triângulos são numerados: 1, 2, 3. Os vértices dos triângulos menores também são numerados: 1, 2 ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre os vértices do triângulo maior oposto ao vértice i não podem receber o número i. Mostre que entre os triângulo menores existe um com os vértices 1, 2, 3.*



Resolução: Contaremos o número de segmentos $\overline{12}$ (com algumas repetições). Eles aparecem nos triângulos

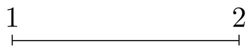


Digamos que há x triângulos 123, y triângulos 122 e z triângulos 112. Observe que os segmentos $\overline{12}$ internos ao triângulo grande são contados duas vezes (eles são comuns a dois triângulos) e os segmentos do lado do triângulo grande, somente uma vez. Notemos também que os segmentos $\overline{12}$ aparecem duas vezes nos triângulos 122 e 112 e uma vez nos triângulos 123. Assim,

$$2\,\begin{matrix}\text{segmentos}\\\text{interiores}\end{matrix}+\begin{matrix}\text{segmentos}\\\text{nos lados}\end{matrix}=\begin{matrix}\text{número de}\\\text{segmentos}\end{matrix}=x+2y+2z$$

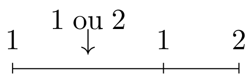
Mostraremos um fato mais forte que o lema: provaremos que x é ímpar e portanto não pode ser zero. Observando a equação acima, vemos que basta provarmos que o número de segmentos $\overline{12}$ sobre os lados do triângulo grande é ímpar.

Como não podemos ter pontos 1 no lado $\overline{23}$ nem pontos 2 no lado $\overline{13}$, todos os segmentos $\overline{12}$ estão sobre o lado $\overline{12}$ do triângulo grande. Provemos que o número de segmentos sobre o lado é ímpar. Para isso, vamos "colocar" vértices 1 ou 2 no lado $\overline{12}$. Assim, no começo, temos somente o lado $\overline{12}$:



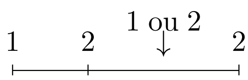
Na hora de colocar vértices, considere o menor segmento em cujo interior colocaremos o vértice. Poderemos estar em uma das seguintes situações:

- Este segmento é do tipo $\overline{11}$:

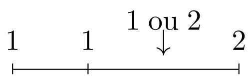
  Se colocarmos 1, o número de segmentos $\overline{12}$ não muda; se colocarmos 2, aumenta de 2. De qualquer forma, a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ não muda.

- Este segmento é do tipo $\overline{22}$:

  Se colocarmos 1, o número de segmentos $\overline{12}$ aumenta de 2; se colocarmos 2, não muda. De qualquer forma, a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ não muda.

- Este segmento é do tipo $\overline{12}$:

  Se colocarmos 1 ou 2, o número de segmentos $\overline{12}$ não muda e é claro que a paridade desse número não muda também.

Logo a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ nunca muda (ou seja, é invariante). Como no começo temos um segmento $\overline{12}$ (o próprio lado $\overline{12}$), temos que o número de segmentos $\overline{12}$ no lado do triângulo grande é sempre ímpar, o que completa nossa demonstração.

Usando tabelas para ajudar a contagem dupla

Em muitas situações, é mais fácil usar tabelas para organizar o que deve ser contado. Em muitos casos, envolvemos duas variáveis; então montar uma tabela com as duas variáveis pode ser bastante útil.

Exemplo 4. *(OBM) Em um torneio de xadrez, cada participante joga com cada um dos outros. Uma vitória vale* 1 *ponto, um empate vale* 1/2 *ponto e uma derrota vale* 0 *ponto. Cada jogador ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres. Prove que a quantidade de participantes do torneio é um quadrado perfeito.*

Resolução: Considere a seguinte tabela, em que colocamos os participantes, separados por sexo, nas linhas e nas colunas. Sendo h a quantidade de homens e m a quantidade de mulheres no torneio, marcamos as quantidades de pontos distribuídos:

	homens	mulheres
homens	$\binom{h}{2}$	x
mulheres	$hm - x$	$\binom{m}{2}$

Então temos $\binom{h}{2} = x$ e $hm - x = \binom{m}{2}$. Somando as duas equações para eliminar o x, obtemos

$$\binom{h}{2} + \binom{m}{2} = hm \iff h + m = (h-m)^2,$$

e o problema acabou.

Contar algo de duas maneiras também nos ajuda a demonstrar desigualdades.

Contando pares

Proposição 1. *Considere uma tabela $\ell \times c$ com zeros e uns, sendo C_j a soma dos números na coluna j, $j = 1, 2, \dots, c$. Suponha que exista t tal que, para cada par de linhas, existam exatamente t colunas que tenham um em ambas as linhas. Então*

$$t\binom{\ell}{2} = \sum_{j=1}^{c} \binom{C_j}{2}.$$

Demonstração: Basta contar pares de uns na mesma coluna. Seja A o conjunto de tais pares.

- **Por linhas:** Cada par de linhas tem exatamente t pares de uns na mesma coluna. Como há $\binom{\ell}{2}$ pares de linhas, $|A| = \binom{\ell}{2} \cdot t$.

- **Por colunas:** Na coluna j há C_j uns e, portanto, $\binom{C_j}{2}$ pares de uns na mesma coluna. Somando sobre as colunas, obtemos $|A| = \sum_{j=1}^{c} \binom{C_j}{2}$.

Aí é só igualar os dois resultados para $|A|$.

Normalmente, é muito difícil que a situação acima ocorra. Então a usamos para provar desigualdades.

Exemplo 5. *(OBM) Sejam $A_1, A_2, \dots, A_k \subset \{1, 2, \dots, n\}$ conjuntos com $|A_i| \ge \frac{n}{2}$ e $|A_i \cap A_j| \le \frac{n}{4}$ para todos i, j com $i \ne j$. Prove que $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| \ge \frac{k}{k+1} \cdot n$.*

Resolução: Podemos supor sem perda de generalidade que $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \{1, 2, \dots, m\}$. Então temos que provar que $m \ge \frac{k}{k+1} \cdot n$. Considere a tabela cujas linhas são os conjuntos e as colunas são os números $1, 2, \dots, m$. Colocamos 1 na linha i e coluna j se, e somente se, $j \in A_i$. Caso contrário, colocamos zero.

	1	2	3	$\dots$	m
A_1	1	1	0	$\dots$	0
A_2	1	1	1	$\dots$	0
$\vdots$					
A_k	0	0	1	$\dots$	1

Note que $A_i \cap A_j$ corresponde aos uns que estão na mesma coluna nas linhas i e j. Então parece ser interessante contar as quantidades de pares de uns na mesma coluna. Seja C_j o número de uns na coluna j, então. Adaptando a proposição acima,

$$\sum_{j=1}^{m} \binom{C_j}{2} \le \frac{n}{4} \cdot \binom{k}{2}$$

Como usamos a informação de que $|A_i| \ge \frac{n}{2}$? Podemos simplesmente somar todos os uns. Sendo S a soma, $S \ge k \cdot \frac{n}{2}$. Logo a inequação acima se reduz a

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} C_j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} C_j \le \frac{nk(k-1)}{8} \iff \sum_{j=1}^{m} C_j^2 - S \le \frac{nk(k-1)}{4}$$

Apareceu a soma dos quadrados, mas só temos a soma! O que fazer? Uma ideia é usar a desigualdade de Cauchy-Schwartz: $\sum_{j=1}^{m} C_j^2 \cdot \sum_{j=1}^{m} 1^2 \ge \left(\sum_{j=1}^{m} C_j\right)^2 \iff \sum_{j=1}^{m} C_j^2 \ge \frac{S^2}{m}$. Logo

$$\frac{S^2}{m} - S \le \sum_{j=1}^{m} C_j^2 - S \le \frac{nk(k-1)}{4} \implies \frac{S^2}{m} - S \le \frac{nk(k-1)}{4}$$

$$\iff \left(S - \frac{m}{2}\right)^2 \le \frac{mnk(k-1)}{4} + \frac{m^2}{4}$$

Sendo $S \ge k \cdot \frac{n}{2} \ge 1 \cdot \frac{m}{2}$, temos

$$\left(k\frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right)^2 \le \frac{mnk(k-1)}{4} + \frac{m^2}{4} \iff m \ge \frac{k}{k+1}n,$$

como queríamos demonstrar.

Finalmente, você pode usar contagem duplas para provar a existência de algo. Basta fazer por contradição.

Exemplo 6. *(IMC) Duzentos estudantes participaram de uma competição de matemática. A prova tinha seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido por pelo menos* 120 *participantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.*

Resolução: Suponha o contrário. Então, para cada par de estudantes existe um problema que nenhum deles resolveu. Vamos, então, contar problemas não resolvidos por pares de estudantes.

Considere, então, a tabela com seis linhas, uma para cada problema, e 200 colunas, uma para cada estudante. Colocamos 1 na linha i e coluna j se, e somente se, o aluno j *não* resolveu o problema i.

	1	2	3	...	200
Problema 1	1	0	0	...	0
Problema 2	1	0	0	...	0
Problema 3	0	1	1	...	0
Problema 4	1	1	1	...	1
Problema 5	1	0	1	...	0
Problema 6	0	0	0	...	1

Os problemas não resolvidos por pares de estudantes são, então, pares de uns na mesma linha. Seja A o conjunto dos pares de uns na mesma linha, então.

- **Por linhas:** Como pelo menos 120 estudantes fizeram cada problema, no máximo $200 - 120 = 80$ não fizeram. Então cada linha tem no máximo $\binom{80}{2}$ pares. Assim, $|A| \le 6 \cdot \binom{80}{2} = 6 \cdot 40 \cdot 79$.

- **Por colunas:** Como cada par de estudantes não resolveu pelo menos um problema, $|A| \ge \binom{200}{2} = 199 \cdot 100$.

Logo $6 \cdot 40 \cdot 79 \ge |A| \ge 199 \cdot 100 \implies 6 \cdot 4 \cdot 79 \ge 1990$. Mas $6 \cdot 4 \cdot 79 < 24 \cdot 80 = 1920 < 1990$, e obtemos um absurdo. Logo existem dois estudantes que, juntos, resolveram todos os problemas.

Problemas

1. (OBM) O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.

Questões/Estudantes	1	2	3	4	5	6
Arnaldo	0	1	1	1	1	0
Bernaldo	1	1	1	0	0	1
Cernaldo	0	1	1	1	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Piraldo constatou que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade m de acertos. Qual é o valor de m?

2. (OBM) Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?

3. (OBM) Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

4. (OBM) No triminó marciano, as peças têm 3 números cada (diferente do dominó da terra, onde cada peça tem apenas 2 números). Os números no triminó marciano também variam de 0 a 6, e para cada escolha de 3 números (não necessariamente distintos) existe uma e somente uma peça que contém esses 3 números. Qual é a soma dos números de todas as peças do triminó marciano?

5. Dado n inteiro, seja $d(n)$ o número de divisores de n. Seja $\overline{d}(n)$ o número médio de divisores dos números entre 1 e n, ou seja,

$$\overline{d}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d(j)$$

Mostre que

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \le \overline{d}(n) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Esta desigualdade nos mostra que $\overline{d}(n) \cong \ln n$, e que a diferença $|\overline{d}(n) - \ln n|$ é no máximo 1.

6. (OBM) Um álbum, composto por 2011 figurinhas, está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre os 33 amigos é *incompleta* quando existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem. Determinar o menor valor de m com a seguinte propriedade: toda distribuição de figurinhas entre os 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos m figurinhas em comum, é incompleta.

7. (OBM) Determine todos os valores de n tais que é possível dividir um triângulo em n triângulos de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice incida o mesmo número de segmentos.

8. (OBM) Temos um tabuleiro quadrado 10×10. Desejamos colocar n peças em casas do tabuleiro de tal forma que não existam 4 peças formando em retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro. Determine o maior valor de n para o qual é possível fazer esta construção.

9. (EUA) Seja A um conjunto com 225 elementos. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ subconjuntos de A tais que $|A_i| = 45$ para $1 \le i \le 11$ e $|A_i \cap A_j| = 9$ para $1 \le i < j \le 11$. Prove que $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{11}| \ge 165$ e dê um exemplo e, que a igualdade ocorre.

10. (IMO) Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de $2/5$ dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu todos os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.

11. (OBM) Arnaldo e Beatriz se comunicam durante um acampamento usando sinais de fumaça, às vezes usando uma nuvem grande, às vezes uma pequena.

    No tempo disponível antes do café da manhã, Arnaldo consegue enviar uma sequência de 24 nuvens. Como Beatriz nem sempre consegue distinguir uma nuvem pequena de uma grande, ela e Arnaldo fizeram um dicionário antes de ir para o acampamento. No dicionário aparecem N sequências de 24 tamanhos de nuvem (como por exemplo a sequência PGPGPGPGPGPGGPGPGPGPGPGP, onde G significa nuvem grande e P significa nuvem pequena). Para cada uma das N sequências, o dicionário indica seu significado. Para evitar interpretações erradas, Arnaldo e Beatriz evitaram incluir no dicionário sequências parecidas. Mais precisamente, duas sequências no dicionário sempre diferem em pelo menos 8 das 24 posições.

    Demonstre que $N \le 4096$.

12. (OBM) Considere todas as maneiras de colocarmos nas casas de um tabuleiro 10×10 exatamente dez vezes cada um dos algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$.

    Encontre o maior inteiro n com a propriedade de que, em cada tabuleiro, alguma linha ou alguma coluna contenha pelo menos n algarismos diferentes.

13. (OBM) Dados números reais $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, suponha que todo número real ocorre no máximo duas vezes entre as diferenças $x_j - x_i$, com $1 \le i < j \le n$. Prove que há pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ números reais que ocorrem exatamente uma vez entre tais diferenças.

14. (IMO) Sejam n e k dois inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos num plano tais que

    (i) Não haja três pontos de S que sejam colineares;

    (ii) Para qualquer ponto P, há pelo menos k pontos de S que são equidistantes de P.

    Prove que $k < 1/2 + \sqrt{2n}$.

15. (IMO) Num concurso, há m candidatos e n juízes, onde $n \ge 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que

$$\frac{k}{m} \ge \frac{n-1}{2n}$$

16. (IMO) Vinte e uma garotas e vinte e um rapazes participaram de uma competição matemática. Sabe-se que

    - cada estudante resolveu no máximo seis problemas;
    - para cada par com uma garota e um rapaz, existe um problema que ambos resolveram.

    Prove que existe um problema que foi resolvido por três garotas e três rapazes.

Bibliografia

1. T. Andreescu e Z. Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser 2003.
2. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.
3. A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. Pinto Carvalho e P. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM.
4. C. Chuan-Chong e K. Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific 1992.

Respostas, Dicas e Soluções

1. 12. Conte a quantidade de uns.
2. 90. Conte a quantidade de arestas (já vimos como fazer isso!)
3. 5. Cada mês pode ter 4 ou 5 semanas, e o ano pode ter 53 domingos ($365 = 52 \cdot 7 + 1$; note que nem precisamos apelar para os anos bissextos!).
4. $(0+1+2+3+4+5+6)(3+2\cdot 6+1\cdot(\binom{6}{2}+6)) = 756$.
5. Conte os pares (i,j) com $1 \le i,j \le n$ tais que $i \mid j$. Lembre-se, i é divisor e j é múltiplo.
6. 1890. Pense nas figurinhas que cada um *não* tem para montar um exemplo. Conte os pares $(x, \{i,j\})$ em que x é uma figurinha que nem i ou j tem.
7. $n \in \{3, 7, 19\}$. Calcule a soma dos ângulos internos e conte as arestas usando os vértices. Você vai reduzir o problema para um problema de divisibilidade.
8. 34. Um retângulo é o mesmo que repetir em duas linhas um par de casas marcadas nas mesmas duas colunas. Então conte os pares de colunas para provar que a quantidade de casas marcadas é menor ou igual a 35. O caso em que dá 35, porém, não é possível; examine o caso de igualdade para obter um absurdo ao tentar montar um exemplo.

9. Considere uma tabela com 11 linhas e $m = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{11}|$ colunas e marque 1 na linha i e coluna j quando $j \in A_i$. O que significa $|A_i \cap A_j| = 9$? Para montar o exemplo, divida 9 em $3 \cdot 3$ e pense na "coincidência" numérica $\binom{11}{3} = 165$. Você pode construir a tabela "ao contrário" também.

10. Mais uma vez, considere a tabela com os problemas nas linhas e os estudantes nas colunas e conte pares de estudantes que resolveram dois problemas. Você vai conseguir os dois estudantes que você precisa exceto em um caso (o número de estudantes n é da forma $n = 5k+2$, k inteiro); faça uma tabela problema$\times$problema com as quantidades de alunos que resolveram ambos os problemas para chegar a uma contradição.

11. Considere uma *vizinhança* de tamanho 4 de cada sequência, que é o conjunto de sequências que diferem em no máximo quatro nuvens. Essas vizinhanças devem ser disjuntas, com exceção de um caso, que é fácil de lidar. Com isso é possível conseguir uma extimativa para N. E por incrível que pareça, $\binom{24}{0}+\binom{24}{1}+\binom{24}{2}+\binom{24}{3}+\frac{1}{6}\binom{24}{4} = 2^{12}$ (essa conta provavelmente vai aparecer na sua solução!).

12. 4. Conte os pares (número, fila) em que o número aparece na fila (sendo "fila" uma linha ou coluna). A grande ideia é que cada número aparece em pelo menos 7 filas.

13. Considere os conjuntos $A_k = \{x_j - x_k \mid k < j \le n\}$. Prove que $|A_k \cap A_m| \le 1$ para $k \ne m$ (dica: se é maior, uma diferença aparece três vezes). Então conte as diferenças que aparecem duas vezes, de A_n para A_1; pule as repetições e use o fato de que $|A_k \cap A_m| \le 1$ para chegar a um limitante. Depois conte as diferenças que aparecem exatamente uma vez subtraindo de $\binom{n}{2}$ o dobro dos números que aparecem duas vezes (na verdade você vai precisar fazer uma estimativa).

14. "Equidistante a dois pontos" remete a mediatriz. Então conte os pontos de S sobre as mediatrizes de dois pontos de S ou, sendo mais preciso, os pares (P, r), em que P é um ponto de S e r é uma mediatriz de dois pontos de S que passa por P.

15. Monte uma tabela com os juízes nas colunas e os candidatos nas linhas. Sendo 0 "reprovado" e 1 "aprovado", conte as coincidências de pares de juízes, ou seja, pares de zeros ou uns na mesma linha.

16. Monte uma tabela 21×21 com as garotas nas linhas e os rapazes nas colunas. Coloque, em cada entrada da tabela, um dos problemas que a garota e o rapaz correspondentes ambos resolveram. Em seguida, pinte de azul as casinhas com problemas que aparecem na mesma linha três vezes (são pelo menos 11 por linha, você consegue ver por quê?) e de rosa as casinhas com problemas que aparecem na mesma coluna três vezes. O problema se resume a provar que uma casinha fica pintada das duas cores.