Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 4

Contagem com Recursões

Muitas vezes não é possível resolver problemas de contagem diretamente combinando os princípios aditivo e multiplicativo. Para resolver esses problemas recorremos a outros recursos: as *recursões* ou *recorrências*. A principal ideia por trás das recursões é expressar uma quantidade x_n em função de quantidades anteriores $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$.

Obtendo recursões

O nosso primeiro exemplo *pode* ser resolvido com o princípio multiplicativo, mas é a maneira mais fácil de começar.

Exemplo 1. *Quantas são as sequências com n letras, cada uma igual a a, b ou c?*

Resolução: Sabemos que, do princípio multiplicativo, a resposta é 3^n. Mas vamos resolver esse problema sob a ótica das recursões: seja x_k a quantidade de sequências com k letras nas condições do enunciado. Como podemos obter uma sequência com n letras? Simples: colocamos uma nova letra depois de uma sequência com $n-1$ letras! Assim, como há três possibilidades para a última letra e x_{n-1} para a sequência de $n-1$ letras, $x_n = 3 \cdot x_{n-1}$. Além disso, como só há uma sequência vazia, $x_0 = 1$. Assim, chegamos à recursão

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = 3x_{n-1} \end{cases}$$

Como resolver essa recursão? Observe que $\frac{x_k}{x_{k-1}} = 3$ para todo k, de modo que

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0} \cdot x_0 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n \text{ vezes}} \cdot 1 = 3^n$$

Exemplo 2. *Quantas são as sequências com n letras, cada uma igual a a, b ou c, de modo que não há duas letras a seguidas?*

Resolução: Seja x_k a quantidade de sequências com k letras nas condições do enunciado. Observemos uma sequência de n letras. O que acontece se tiramos a última letra? Agora depende: se a última letra não é a (sendo então igual a b ou c) não há restrições para a sequência de $n-1$ letras que sobrou, totalizando $2 \cdot x_{n-1}$ possibilidades; se a última letra é a então a última letra da sequência de $n-1$ que sobrou **não** é a, ou seja, essa sequência termina em b ou c. Além disso, não há restrições adicionais para a sequência de $n-2$ letras que sobrou, obtendo nesse caso um total de $2 \cdot x_{n-2}$ sequências.

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & \underline{\qquad}_{x_{n-1}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{c}}{2} & & 2x_{n-1} \\ x_n & & \cup & & + \\ & \searrow & \underline{\qquad}_{x_{n-2}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{c}}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{1} & & 2x_{n-2} \end{array}$$

Assim, $x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$. Note que para calcular $x_2 = 2x_1 + 2x_0$ precisamos dos valores de x_0 e x_1. Como essas palavras têm menos de duas letras, não há restrições, ou seja, $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$. Obtemos, então, a recursão

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 3 \\ x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2} \end{cases}$$

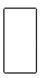
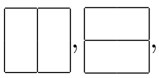
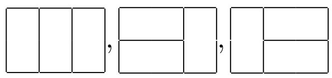
Vale a pena conferir um caso pequeno: para $n = 2$ há $3^2 - 1 = 8$ possibilidades (todas menos aa). De fato, $8 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \iff x_2 = 2x_1 + 2x_0$.

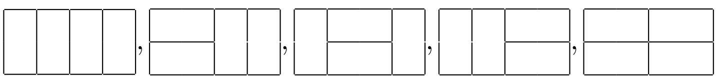
Depois veremos como resolver essa recursão.

É claro que não podemos deixar de incluir os famosos números de Fibonacci:

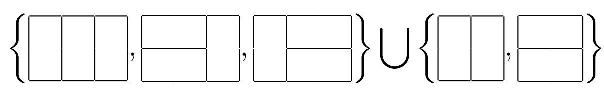
Exemplo 3. *De quantas maneiras podemos guardar n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$?*

Resolução: Seja x_n o número de maneiras de distribuir os n dominós na caixa. Vejamos alguns casos pequenos: primeiro, $x_0 = 1$,

$x_1 = 1$:  $x_2 = 2$:  $x_3 = 3$: 

$x_4 = 5$: 

Lembrando que a ideia em recursão é obter cada valor em função dos anteriores, vejamos o que ocorre quando tiramos a última parte do caso $n = 4$:

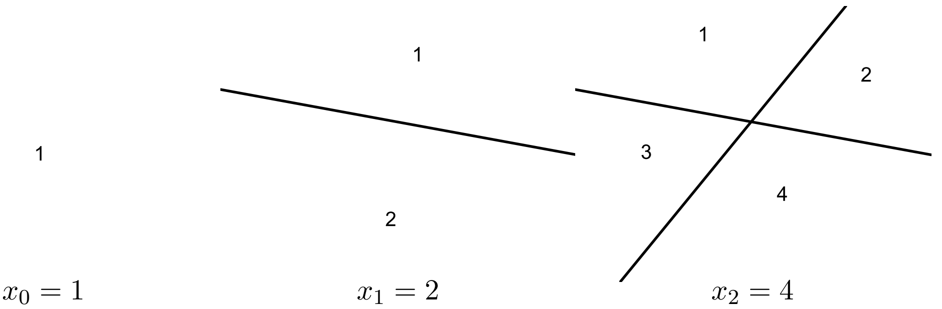
$x_4 = 5$: 

Note que ao tirarmos o "fim" de cada possibilidade, obtemos uma possibilidade menor. Como os "fins" têm tamanho 1 ou 2, reduz-se ao caso anterior ou pré-anterior, de modo que $x_4 = x_3 + x_2$. É claro que isso pode ser generalizado para

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \end{cases}$$

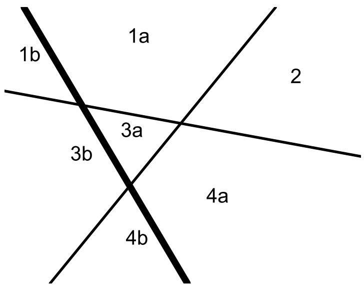
Exemplo 4. *Em no máximo quantas regiões n retas cortam o plano?*

Resolução: Antes, vejamos alguns casos pequenos. Sendo x_n o número máximo de regiões determinadas por n retas:



$x_0 = 1$ $\qquad$ $x_1 = 2$ $\qquad$ $x_2 = 4$

Parece que $x_n = 2^n$, não? Não tão rápido: para $n = 3$ temos uma surpresa: adicionando uma terceira reta, vemos que ela não pode cortar todas as regiões anteriores:



O que aconteceu? A reta cortou 3 regiões em vez de 4 e obtivemos $x_3 = 7$. Pensando um pouco, vemos que isso é o melhor que podemos fazer mesmo: a nova reta vai ser cortada no máximo uma vez por cada uma das outras duas retas. Cada corte é uma "mudança de região", de modo que essas duas mudanças implicam três novas regiões. Assim, $x_3 = x_2 + 3$.

Pensando ainda mais um pouco, não é difícil generalizar: ao colocarmos a n-ésima reta, ela vai ser cortada no máximo $n - 1$ vezes, gerando $n - 1$ "mudanças de região" e, portanto, n novas regiões, de modo que $x_n = x_{n-1} + n$. Observando o caso pequeno $x_0 = 1$, temos a recursão

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + n \end{cases}$$

Utilizando recursões auxiliares

Da mesma forma que utilizamos sistemas de equações no lugar de uma única equação para resolver problemas, às vezes pode ser mais fácil obter um sistema de recursões.

Exemplo 5. *O* DNA marciano *é formado por sequências de cinco proteínas chamadas a, b, c, d, e. Nas sequências, nunca aparecem cd, ce, ed e ee. Todas as outras possibilidades são permitidas. Quantas são as possíveis sequências de DNA marciano com n proteínas?*

Resolução: Note que se tentarmos obter uma recorrência teremos problemas quando a última proteína for d ou e: a penúltima não pode ser c ou e. Então sejam a_n a quantidade de sequências de n proteínas que não terminam com c ou e e b_n a quantidade de sequências que terminam com c ou e. Queremos $a_n + b_n$.

Observe que $a_n = 3(a_{n-1} + b_{n-1})$, já que não há restrições sobre a penúltima letra e podemos colocar a, b ou d no final da sequência. Além disso, podemos colocar c no final de qualquer uma das $a_{n-1} + b_{n-1}$ sequências de $n-1$ proteínas e e no final de qualquer uma das a_{n-1} sequências que não termine com c ou e, ou seja, $b_n = (a_{n-1} + b_{n-1}) + a_{n-1} = 2a_{n-1} + b_{n-1}$. Observando que $a_0 = 1$ e $b_0 = 0$ (veja que a sequência vazia **não** termina com c ou e), temos o sistema

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ a_n = 3a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

Note que, de fato, $a_1 = 3$ e $b_1 = 2$. Como resolver esse sistema? Nesse caso, basta "isolar" as variáveis:

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ a_n = 3a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ b_{n-1} = \dfrac{a_n - 3a_{n-1}}{3} \\ a_{n-1} = \dfrac{b_n - b_{n-1}}{2} \end{cases}$$

Como as equações valem **para todo** n, obtemos as recursões:

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ b_{n-1} = \dfrac{a_n - 3a_{n-1}}{3} \\ a_{n-1} = \dfrac{b_n - b_{n-1}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ b_{n-1} = \dfrac{\frac{b_{n+1}-b_n}{2} - 3\frac{b_n - b_{n-1}}{2}}{3} \\ a_{n-1} = \dfrac{\frac{a_{n+1}-3a_n}{3} - \frac{a_n - 3a_{n-1}}{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ b_{n+1} = 4b_n + 3b_{n-1} \\ a_{n+1} = 4a_n + 3a_{n-1} \end{cases}$$

Convoluções

Algumas recursões envolvem **todos** os termos anteriores.

Exemplo 6. *De quantas maneiras podemos ordenar n pares de parêntesis? Todos os parêntesis interiores a um par de parêntesis devem ser fechados. Por exemplo, as sequências* $((())())$ *e* $()()(()())$ *são permitidas (elas são, na ordem,* $\underset{12332441}{((())())}$ *e* $\underset{1122344553}{()()(()())}$*) mas* $()))(()$ *e* $)($ *não são permitidas (pois fecham parêntesis que não foram abertos).*

Resolução: Novamente, casos pequenos. Para $n = 0$, temos uma maneira: a vazia; para $n = 1$, uma maneira: (). Para $n = 2$, temos duas maneiras: ()() e (()). Para $n = 3$, cinco maneiras: ()()(), ()(()), (())(), (()()) e ((())).

Para obter a recursão, pensamos no último par de parêntesis, vimos o que está dentro dele e o que está à esquerda dele. Para $n = 3$, temos

$$()()\big(\emptyset\big),\quad ()\big(()\big),\quad (())\big(\emptyset\big),\quad \emptyset\big(()()\big),\quad \emptyset\big((())\big)$$

Note que pode haver o conjunto vazio, um par ou dois pares de parêntesis dentro do último par. Nesses casos, há dois, um e zero pares de parêntesis à esquerda, respecitamente, de modo que $a_3 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0$. Novamente, podemos generalizar, obtendo

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + a_2a_{n-3} + \cdots + a_{n-1}a_0 \end{cases}$$

Recursões desse tipo são chamadas *convoluções*.

Resolvendo recursões

Como resolver as recursões acima? Para isso há várias técnicas, algumas das quais veremos agora. Não é a intenção aqui esgotar todas as técnicas. Para algo mais detalhado, veja [1].

Somatórios

Vamos resolver o problema das retas no plano, cuja recorrência é

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + n \end{cases}$$

Essa é bastante simples, pois é possível "telescopar" a soma:

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= n \\ x_{n-1} - x_{n-2} &= n-1 \\ x_{n-2} - x_{n-3} &= n-2 \\ &\vdots \\ x_2 - x_1 &= 2 \\ x_1 - x_0 &= 1 \\ \hline x_n - x_0 &= 1 + 2 + \cdots + n \end{aligned}$$

Assim, basta calcular a soma $1 + 2 + \cdots + n$, que é conhecida e igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, ou seja,

$$x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Recursões lineares homogêneas

Recursões do tipo $x_n = a_{n-1}x_{n-1} + a_{n-2}x_{n-2} + \cdots + a_{n-k}x_{n-k}$, em que os a_i's e k são constantes, são denominadas *recursões lineares homogêneas* e têm um método geral de resolução. Ilustraremos esse método geral com exemplos.

Para você poder resolver esse tipo de recursão vale a pena saber que, para $a \neq b$,

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

Exemplo 7. *Resolva a recursão*

$$\begin{cases} x_0 = 2, x_1 = 5 \\ x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \end{cases}$$

Resolução: Definimos a *equação característica* da recursão a equação obtida quando "transformamos subscrito em expoente". No nosso exemplo, é $x^n = 5x^{n-1} - 6x^{n-2} \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2$ ou $x = 3$ (não estamos interessados nas raízes nulas). Mas o que interessa é a seguinte conta, que pode ser feita também com a recursão:

$$\begin{array}{r|r} x^n - 5x^{n-1} + 6x^{n-2} = 0 & x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \\ \iff x^n - 2x^{n-1} = 3(x^{n-1} - 2x^{n-2}) & \iff x_n - 2x_{n-1} = 3(x_{n-1} - 2x_{n-2}) \end{array}$$

Seja $y_n = x_n - 2x_{n-1}$. Então $y_n = 3y_{n-1}$ e temos $y_n = 3^{n-1}y_1 = 3^{n-1}(x_1 - 2x_0) = 3^{n-1}(5 - 2 \cdot 2) = 3^{n-1}$. Deste modo, $x_n - 2x_{n-1} = 3^{n-1}$ e forçamos uma soma telescópica:

$$\begin{aligned} x_n - 2x_{n-1} &= 3^{n-1} \\ 2x_{n-1} - 2^2x_{n-2} &= 3^{n-2}2 \\ 2^2x_{n-2} - 2^3x_{n-3} &= 3^{n-3}2^2 \\ &\vdots \\ 2^{n-1}x_1 - 2^nx_0 &= 2^{n-1} \\ \hline x_n - 2^nx_0 &= 3^{n-1} + 3^{n-2}2 + 3^{n-3}2^2 + \cdots + 2^{n-1} \end{aligned}$$

Assim, $x_n - 2^n \cdot 2 = \frac{3^n - 2^n}{3-2} \iff x_n = 2^n + 3^n$.

Isso pode ser generalizado: se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são as raízes distintas da equação característica, então existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que

$$x_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$$

O que acontece quando há raízes múltiplas?

Exemplo 8. *Resolva a recursão*

$$\begin{cases} x_0 = 2, x_1 = 5 \\ x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} \end{cases}$$

Resolução: Usamos o mesmo truque: a equação característica é $x^n = 4x^{n-1} - 4x^{n-2} \iff x = 2$, uma raiz dupla. Seguimos com a fatoração

$$x_n - 2x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 2x_{n-2})$$

Sendo $y_n = x_n - 2x_{n-1}$, temos $y_n = 2y_{n-1}$, ou seja, $y_n = 2^{n-1}y_1 = 2^{n-1}$. Mas o mais interessante é o que ocorre ao forçamos a telescópica:

$$\begin{array}{r}
x_n - 2x_{n-1} = 2^{n-1} \\
2x_{n-1} - 2^2x_{n-2} = 2^{n-2}2 = 2^{n-1} \\
2^2x_{n-2} - 2^3x_{n-3} = 2^{n-3}2^2 = 2^{n-1} \\
\vdots \\
2^{n-1}x_1 - 2^nx_0 = 2^{n-1} \\
\hline
x_n - 2^nx_0 = n \cdot 2^{n-1}
\end{array}$$

Assim, $x_n = 2^n(2 + n/2)$. Na verdade, com uma indução pode-se provar o seguinte

Teorema 1. *Se a equação característica de uma recursão linear homogênea com coeficientes constantes tem raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ com multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$ respectivamente, então existem polinômios $p_1, p_2, \ldots, p_k$, de graus $m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_k - 1$ respectivamente e coeficientes constantes tais que*

$$x_n = p_1(n)\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + \cdots + p_k(n)\alpha_k^n$$

Você pode aplicar diretamente o teorema sem demonstrar. Por exemplo, vamos resolver o problema dos dominós, cuja recursão é

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \end{cases}$$

A equação característica é $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então existem constantes A e B (vamos simplificar notação!) tais que

$$x_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para obter A e B, substituímos n por 0 e 1, obtendo

$$\left|\begin{array}{l} 1 = A + B \\ 1 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ B = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

Assim,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Recursões lineares "quase" homogêneas

Quando temos alguma constante (ou algo não tão constante), podemos reduzir o problema a uma recursão linear. Por exemplo, considere a recursão

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + 2$$

Seja $x_n = y_n + c$, c constante. Então

$$y_n + c = y_{n-1} + c + y_{n-2} + c + 2 \iff y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + c + 2$$

Fazendo $c + 2 = 0 \iff c = -2$, obtemos uma recursão linear homogênea.

Outro exemplo: se

$$x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2^n$$

isolamos 2^n e lembramos que 2^n satisfaz $y_n = 2y_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
&x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2^n \\
\iff &x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2(x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3x_{n-3}) \\
\implies &x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}
\end{aligned}$$

Note que 2 é raiz da equação característica $x^n = 6x^{n-1} - 11x^{n-2} + 6x^{n-3}$. Isso não é coincidência!

Convoluções e funções geratrizes

Uma recursão interessante é a dos parêntesis:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + a_2a_{n-3} + \cdots + a_{n-1}a_0 \end{cases}$$

Para resolver essa recursão utilizaremos uma *função geratriz*. Considere a *série formal* (por enquanto, não se preocupe com nomes!)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

A ideia é achar todos os termos dessa série. Fazemos contas como se fossem polinômios. Por exemplo,

$$(f(x))^2 = a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^2 + (a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0)x^3 + \cdots$$

Familiar? Sim! Obtemos a recorrência, de modo que

$$(f(x))^2 = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \cdots$$

Parece a mesma coisa, mas um pouco deslocada? Basta multiplicar por x:

$$x(f(x))^2 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots = f(x) - a_0$$

Lembrando que $a_0 = 1$, obtemos a "equação do segundo grau"

$$x(f(x))^2 - f(x) + 1 = 0 \iff f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Que sinal adotar? Substitua $x = 0$: devemos obter $f(0) = a_0 = 1$. Se adotamos $+$, obtemos $f(0) \to \infty$, o que não é possível. Logo o sinal certo é $-$, ou seja,

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Agora temos que transformar essa conta em série. Para isso, utilizamos o *binômio de Newton generalizado*:

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k$$

em que

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, k > 0$$

Por exemplo, para $k > 0$,

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{k} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(2k-3)\cdot(2k-2)}{k!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{k!\cdot 2^{k-1}(k-1)!} \\ &= \frac{1}{2k}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1}\binom{2k-2}{k-1}\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}(1-4x)^{1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k} 1^{1/2-k}(-4x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1}\binom{2k-2}{k-1}(-4x)^k \\ &= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k\end{aligned}$$

e podemos desenvolver a série:

$$f(x) = \frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2x} = \frac{1 - (1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k)}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^{k-1}$$

Assim,

$$f(x) = \frac{1}{1}\binom{0}{0} + \frac{1}{2}\binom{2}{1}x + \frac{1}{3}\binom{4}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n + \cdots$$

e concluímos que

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Esses números são conhecidos como *números de Catalan*.

Estimativas

Às vezes as recursões são muito difíceis. Então vale mais a pena fazer algumas estimativas. Nesses casos, uma contagem com recursões e exclusão de casos desfavoráveis ("tudo menos o que não interessa") costumam dar conta do recado.

Nos próximos exemplos, trabalharemos com *palavras*, que são simplesmente sequências de símbolos pertencentes a um conjunto Σ. A recursão normalmente funciona assim:

- Seja x_n a quantidade de palavras com comprimento n que têm a propriedade desejada. Vamos estimar x_{n+1} em função dos termos anteriores.
- Sendo $k = |\Sigma|$, então $x_{n+1} = kx_n - p$, sendo p a quantidade de palavras proibidas formadas com a adição de um símbolo no final das x_n palavras permitidas com comprimento n.
- Normalmente, p é estimado (por cima) em função dos termos anteriores e montamos uma deigualdade recursiva.
- Tentamos provar por indução que $x_{n+1} \geq c \cdot x_n$ para algum $c > 1$. Para isso, usamos a desigualdade recursiva.

Vamos ver direito como isso funciona.

Exemplo 9. *Seja $\Sigma = \{a, b, c\}$. Algumas sequências, cada uma com duas ou mais letras, são proibidas. Uma palavra é* permitida *quando não contém sequências proibidas. Sabe-se que não há duas ou mais sequências proibidas de mesmo comprimento. Prove que existem palavras permitidas de qualquer tamanho.*

Resolução: Seja x_n a quantidade de palavras permitidas de tamanho n. Temos então que provar que $x_n > 0$.

Vamos estimar x_{n+1}. Colocando uma letra à direita de uma palavra permitida de tamanho n, obtemos $3x_n$ palavras. Todavia, podemos formar uma sequência proibida no final, e devemos excluir casos. Seja então y_k o número de palavras formadas com a palavra proibida de tamanho k no final. Então

$$x_{n+1} = 3x_n - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

Vamos estimar y_i. Note que ao tirarmos a sequência proibida de tamanho i, obtemos uma palavra permitida de $n - i$ letras. Logo $y_i \leq x_{n-i}$. Note que não necessariamente ocorre a igualdade porque pode ser que nem toda palavra permitida de $n - i$ letras seja gerada pela retirada da sequência proibida. Portanto, fazendo $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} \geq 3x_n - (x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_0)$$

Suponha que $x_{k+1} \geq m \cdot x_k$ para todo k. Vamos encontrar um valor de $m > 1$. Temos $x_n \geq m^i \cdot x_{n-i} \iff x_{n-i} \leq x_n/m^i$. Assim,

$$x_{n+1} \geq 3x_n - (x_n/m + x_n/m^2 + \cdots + x_n/m^n)$$

Aí, em vez de resolver uma inequação polinomial de grau n (onde n varia!), vamos fazer mais uma estimativa:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\cdots+\frac{1}{m^n}<\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\cdots=\frac{1/m}{1-1/m}=\frac{1}{m-1}$$

Logo

$$x_{n+1}>3x_n-x_n/(m-1)=\frac{3m-4}{m-1}x_n$$

Basta então que

$$\frac{3m-4}{m-1}\geq m \iff m^2-4m+4\leq 0 \iff m=2$$

Assim, $x_{n+1}\geq 2x_n$ para todo n natural e, deste modo, $x_n\geq 2^n$. Logo há palavras permitidas de qualquer tamanho. □

Problemas

1. Resolva todas as recursões que faltam ser resolvidas nos exemplos, exceto as da seção de estimativas.

2. Em no máximo quantas regiões n planos dividem o espaço?

3. De quantas maneiras podemos guardar $3n$ dominós 2×1 em uma caixa $3\times 2n$?

4. De quantas maneiras podemos guardar $2n$ blocos $2\times 1\times 1$ em uma caixa $2\times 2\times n$?

5. De quantas maneiras podemos dividir um polígono convexo de $n+2$ lados em n triângulos?

6. (OBM) Esmeralda tem um círculo de cartolina dividido em n setores circulares, numerados de 1 a n, no sentido horário. De quantas maneiras Esmeralda pode pintar a cartolina, pintando cada setor com uma cor, tendo disponíveis k cores e de modo que quaisquer dois setores circulares vizinhos (isto é, que têm um segmento em comum como fronteira) tenham cores diferentes? Note que isso implica que os setores de números 1 e n devem ter cores diferentes.

7. (OBM) No campeonato tumboliano de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um resultado é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Flameiras não sofreu nenhuma derrota e tem 20 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou. Quantas sequências ordenadas de resultados o Flameiras pode ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades, por exemplo, são (V, E, E, V, E, V, V, V, E, E) e (E, V, V, V, V, V, E, V).

8. (OBM) Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

9. (OBM) Para efetuar um sorteio entre os n alunos de uma escola ($n > 1$) se adota o seguinte procedimento. Os alunos são colocados em roda e inicia-se uma contagem da forma "um, DOIS, um, DOIS, ...". Cada vez que se diz DOIS o aluno correspondente é eliminado e sai da roda. A contagem prossegue até que sobre um único aluno, que é o escolhido.

    (a) Para que valores de n o aluno escolhido é aquele por quem começou o sorteio?

    (b) Se há 192 alunos na roda inicial, qual é a posição na roda do aluno escolhido?

10. (OBM) O profeta venusiano Zabruberson enviou a seus discípulos uma palavra de 10000 letras, sendo cada uma delas A ou E: a *Palavra Zabrúbica*. Seus seguidores passaram a considerar, para $1 \le k \le 10000$, cada palavra formada por k letras consecutivas da Palavra Zabrúbica uma *palavra profética* de tamanho k. Sabe-se que há no máximo 7 palavras proféticas de tamanho 3. Determine o número máximo de palavras proféticas de tamanho 10.

11. Prove que existem pelo menos 8^n números de n algarismos sem dois blocos consecutivos iguais de algarismos.

12. Seja $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Uma palavra é dita *complicada* quando contém dois blocos consecutivos iguais. Caso contrário, a palavra é dita *simples*. Por exemplo, *badcabad* é simples e *baba* é complicada. Prove que há pelo menos 2^n palavras simples de tamanho n.

Bibliografia

1. Knuth, Graham e Patashnik, *Concrete Mathematics.*

2. T. Andreescu e Z. Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser 2003.

3. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

4. A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. Pinto Carvalho e P. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM.

5. C. Chuan-Chong e K. Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific 1992.

Respostas, Dicas e Soluções

1. Exemplo 2: $\frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$; exemplo 5: o total é $\frac{7+3\sqrt{7}}{14}(2+\sqrt{7})^n + \frac{7-3\sqrt{7}}{14}(2-\sqrt{7})^n$.

2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$. Considere um plano: ele corta o espaço em vários novos pedaços: quantos? Veja as interseções do plano com os outros planos e reduza o problema para dividir o plano com n retas.

3. Sejam a_n o número de maneiras de guardar $3n$ dominós em uma caixa $3 \times 2n$ e b_n o número de maneiras de guardar $3n+2$ dominós em uma caixa $3 \times (2n+1)$ acrescida de uma casinha no canto superior direito. Então $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ e $b_n = b_{n-1} + a_n$. Resolvendo a recursão obtemos $a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$.

4. Sejam a_n o número de maneiras de guardar os blocos em uma caixa $2 \times 2 \times n$ e b_n o número de maneiras de guardar os blocos em uma caixa $2 \times 2 \times n$ acrescida de um bloco $2 \times 1 \times 1$ (essa caixa tem "altura" $n+1$). Então $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $b_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 4b_{n-2}$ e $b_n = b_{n-1} + a_n$. Resolvendo, encontramos $a_n = \frac{1}{6}(2+\sqrt{3})^{n+1} + \frac{1}{6}(2-\sqrt{3})^{n+1} + \frac{1}{3}(-1)^n$.

5. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (sim, é Catalan de novo!). A recorrência é a mesma: tome um lado qualquer e considere o triângulo que o contém como lado.

6. Temos $a_n = (k-2)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}$ para $n \geq 4$. Resolvendo, encontramos $a_n = k$ se $n = 1$ e $a_n = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n$ para $n \geq 2$.

7. Temos $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. É mais fácil substituir (com um pouco de paciência!) até $n = 20$. Obtemos $a_{20} = 1278$.

8. Temos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$ (sim, é Fibonacci deslocado!). Resolvendo ou simplesmente substituindo até $n = 10$, obtemos $a_{10} = 144$.

9. Sendo j_n a posição do escolhido se o sorteio tiver n alunos, temos $j_1 = 1$, $j_{2n} = 2j_n - 1$ (pense na primeira rodada; só sobra quem está em posição ímpar, e o vencedor está entre eles; o jogo se reduz a n pessoas) e $j_{2n+1} = 2j_n + 1$ (idem, mas sobra quem está em posição ímpar, exceto 1). Com isso, no item a, note que $j_{2n+1} > 1$ para $n \geq 1$ e $j_{2n} = 1 \iff j_n = 1$. Isso quer dizer que $j_n = 1 \iff n = 2^k$ para algum k inteiro não-negativo. No item b, basta calcular $j_{192} = 129$. No caso geral, pode-se provar (tente!) que se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_2 b_1 b_0)_2$ é escrito na base binária, $j_n = (b_{k-1} \ldots b_1 b_0 b_k)_2$.

10. Sendo a_n a quantidade máxima de palavras proféticas de tamanho n, vemos que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ e $a_3 = 7$. Note que há pelo menos uma palavra proibida P de tamanho 3. Então para obter a recursão consideramos as três últimas letras e dividimos as palavras de tamanho n em três classes, de acordo com a primeira letra da direita para a esquerda que difere de P. Com isso, escolhendo, digamos $P = \text{AAA}$, temos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ e com isso podemos calcular $a_{10} = 504$. Enfim, falta provar a existência de uma Palavra Zabrúbica. Mas isso é fácil: tome as 504 palavras proféticas, separe-as por uma letra E, e concatene tudo. O que sobrar, preencha com letras E (vai sobrar, pois $504 \cdot 11 < 10000$).

11. Basta estimar a quantidade total de números de n algarismos: $a_1 = 9$ e $a_n = 10a_{n-1} - a_{n-1} - a_{n-2} - \cdots - a_{\lfloor n/2 \rfloor}$. Usemos a técnica do exemplo: seja m tal que $a_{n+1} \geq m \cdot a_n$ para todo n. Então $a_{n-i} \leq a_{n-1}/m^{i-1}$ e $a_n \geq 10a_{n-1} - a_{n-1}(1 + 1/m + 1/m^2 + \cdots + 1/m^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}) > a_{n-1} \cdot \frac{9m-10}{m-1}$. Basta que $\frac{9m-10}{m-1} \geq m \iff m^2 - 10m + 10 \leq 0$, que é verdadeiro para $m = 8$. Com isso, o problema está resolvido (de fato, podemos melhorar para $a_n > 9 \cdot (5 + \sqrt{15})^{n-1}$; mas aí não é tão bonitinho).

12. Refaça o problema anterior trocando 10 por 4. Vai dar certo!