Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 5

Princípio Da Inclusão-Exclusão
Contagem de Pólya

Nesse capítulo veremos como fazer contagens com repetições. Há duas maneiras básicas de se fazer isso: uma é subtrair as repetições (e colocar de volta os descontos a mais) e outra é dividir cada repetição pela quantidade de vezes que ela aparece.

Subtraindo Repetições: Princípio da Inclusão-Exclusão

Quando queremos contar os elementos da união de conjuntos não disjuntos, a ideia é descontar as repetições.

Você já deve conhecer as fórmulas

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Vamos aplicar e generalizar essas fórmulas.

Exemplo 1. *Quantos números inteiros positivos menores do que* 100 *são múltiplos de* 2, 3 *ou* 5*?*

Solução: Seja A_i o conjunto dos inteiros positivos múltiplos de i e menores ou iguais a 100. Note que $|A_i| = \lfloor \frac{100}{i} \rfloor$. Além disso, o conjunto $A_i \cap A_j$ é o conjunto dos múltiplos de i e de j menores ou iguais a 100, ou seja, é o conjunto dos múltiplos de $\mathrm{mmc}(i, j)$ menores ou iguais a 100.

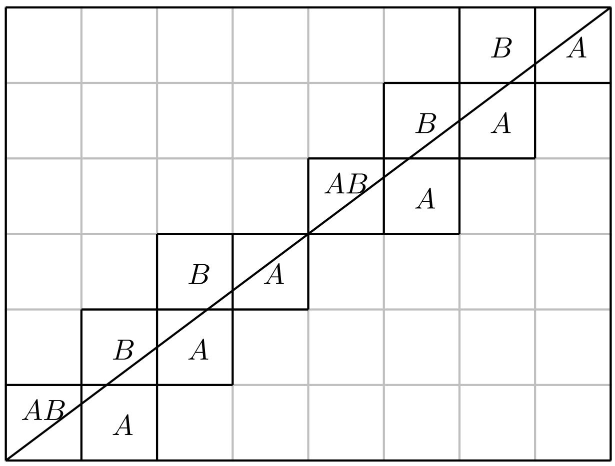
Assim, queremos calcular

$$\begin{aligned}|A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\ &= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor \\ &= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74\end{aligned}$$

Exemplo 2. *Um paralelepipedo* $150 \times 324 \times 375$ *é feito de cubos unitários. Por quantos cubos unitários a diagonal do paralelepípedo passa?*

Solução: Vamos generalizar o problema para um paralelepípedo $m \times n \times p$. Como contar esses cubinhos? Basta imaginar o paralelepípedo cortado em m fatias longitudinais ou n fatias transversais ou p fatias verticais. Note que a diagonal obrigatoriamente corta cada uma das $m + n + p$ fatias. Então a resposta é $m + n + p$, certo?

Errado! De fato, pode ocorrer de haver repetições na "mudança de fatias". Veja o seguinte exemplo bidimensional, num retângulo 6×8: A significa mudança na horizontal e B, mudança na vertical.



Note que há duas repetições: uma no começo e outra na região da casa $(3, 4)$. Opa! $\mathrm{mdc}(6, 8) = 2$ e $(6, 8) = 2 \cdot (3, 4)$. Coincidência? Claro que não! O que acontece é que se $\mathrm{mdc}(a, b) = t$, ocorre repetições em casas da forma $\left(k\frac{a}{t}, k\frac{b}{t}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, t - 1$. Logo devemos subtrair $\mathrm{mdc}(a, b)$ no caso bidimensional e a resposta, no caso bidimensional, é $a + b - \mathrm{mdc}(a, b)$.

E no caso tridimensional? Se denotarmos por L, T e V os conjuntos dos cubos unitários cortados primeiramente na longitudinal, transversal e vertical, respectivamente, queremos

$$\begin{aligned} |L \cup T \cup V| &= |L| + |T| + |V| - |L \cap T| - |L \cap V| - |T \cap V| + |L \cap T \cap V| \\ &= m + n + p - \mathrm{mdc}(m, n) - \mathrm{mdc}(m, p) - \mathrm{mdc}(n, p) + \mathrm{mdc}(m, n, p) \end{aligned}$$

No nosso exemplo, basta substituir os valores, obtendo 768.

Exemplo 3. *Quantos são os primos menores ou iguais a* 111*?*

Solução: Podemos listar todos os exemplos (não são muitos!), mas vamos mostrar um método que serve no caso geral. Basta eliminar os compostos e o número 1, que não é primo nem composto. Assim, sendo t a quantidade de compostos entre 1 e 111, a resposta é $111 - 1 - t$.

Assim, como todo composto m tem um múltiplo menor ou igual a $\sqrt{m}$, basta tirar todos os múltiplos dos primos menores do que $\sqrt{111}$, ou seja, os múltiplos de 2, 3, 5 ou 7, exceto os próprios. Ou seja, sendo A_i o conjunto dos números múltiplos de i entre 1 e 111,

$$t = |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| - 4$$

Como calcular a cardinalidade dessa união? Primeiro, tomamos os múltiplos de 2, os múltiplos de 3, etc; mas aí contamos os múltiplos de pq, p, q esses primos, duas vezes, então descontamos os múltiplos de $2 \cdot 3 = 6$, etc; Mas ao fazer isso, os múltiplos de pqr, p, q, r primos, foram contados três vezes e descontados três vezes (pq, pr, qr), logo devem ser reintegrados; enfim, ao fazermos isso, os múltiplos dos quatro primos foram contados $4 - 6 + 4 = 2$ vezes (4 vezes na primeira contagem, descontados $\binom{4}{2} = 6$ vezes na segunda contagem e recontados $\binom{4}{3} = 4$ vezes). Assim devemos colocá-los de volta. Assim,

$$\begin{aligned}
|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = &\left\lfloor \frac{111}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{7} \right\rfloor \\
&- \left\lfloor \frac{111}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{35} \right\rfloor \\
&+ \left\lfloor \frac{111}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{70} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{105} \right\rfloor \\
&- \left\lfloor \frac{111}{210} \right\rfloor \\
= &\, 55 + 37 + 22 + 15 - 18 - 11 - 7 - 7 - 5 - 3 + 3 + 2 + 1 + 1 - 0 \\
= &\, 85
\end{aligned}$$

Vamos generalizar essa ideia.

Teorema 1 (Princípio da Inclusão-Exclusão)**.** *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. Então o número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Demonstração: Indução sobre n. Sabemos que a fórmula é verdadeira para $n = 2$ (de fato, ela se reduz para as fórmulas conhecidas para $n = 2$ e $n = 3$).

Agora, suponha que a fórmula é verdadeira para $n - 1$. Então

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| + |A_n| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap A_n \right| \\
&= \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| + |A_n| - \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) \right| \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n-1\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + |A_n| - \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n-1\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_n) \right|
\end{aligned}$$

Aí é só agrupar as somas com o mesmo número de conjuntos, e obtemos o que desejamos. De fato, as interseções que não têm A_n estão lá com o sinal certo, o A_n sozinho está lá com o sinal de $+$ e os que têm A_n com outros conjuntos cuja união é X estão com um conjunto a mais e, portanto, devem ter o sinal trocado, como ocorre na última parcela da soma.

Exemplo 4. *Encontre o número de funções sobrejetoras de A em B, sendo $|A| = m$ e $|B| = n$.*

Solução: Seja $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Lembremos que uma função $f\colon A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, $Im(f) = B$. Vamos contar as funções que *não* são sobrejetoras e subtrair do total de funções, que é n^m (há n escolhas para o valor de $f(a)$, para cada $a \in A$). Seja B_i o conjunto das funções que *não* contêm b_i em sua imagem, $1 \le i \le n$. Então note que $|B_i| = (n-1)^m$ (escolhemos para $f(a)$ qualquer valor exceto b_i), $|B_i \cap B_j| = (n-2)^m$ para $i \ne j$ (escolhemos para $f(a)$ qualquer valor exceto i e j), e assim por diante. Assim, como há $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher k elementos de B, pelo princípio da inclusão-exclusão há

$$n^m - \sum_{k=1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^m$$

funções sobrejetoras de A em B.

Como $n^m = \binom{n}{0}(n-0)^m$, podemos agregá-lo ao somatório, obtendo o resultado

$$\sum_{k=0} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

Observação 1. *Como não há funções sobrejetoras de A em B se $|A| > |B|$, se $m > n$ temos*

$$\sum_{k=0} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = 0$$

e como se $|A| = |B|$ as funções sobrejetoras de A em B são as funções bijetoras, temos a identidade

$$\sum_{k=0} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!$$

Exemplo 5. *Em teoria dos números, $\phi(n)$ é a quantidade de números m menores ou iguais a n tais que $\operatorname{mdc}(m,n) = 1$. Mostre que*

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

em que $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são os primos que dividem n.

Solução: Os números que são primos com n são aqueles que *não* são múltiplos de nenhum p_i, p_i divisor primo de n. Então basta subtrair de n a união dos múltiplos de p_i, que já sabemos contar:

$$\phi(n) = n - \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ I \ne \emptyset}} (-1)^{|I|+1} n \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i} = n \left(1 + \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ I \ne \emptyset}} \prod_{i \in I} \frac{-1}{p_i} \right) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Para entender melhor o que foi feito, façamos o resultado para três fatores primos: se os fatores primos de n são p, q e r,

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n - \frac{n}{p} - \frac{n}{q} - \frac{n}{r} + \frac{n}{pq} + \frac{n}{pr} + \frac{n}{qr} - \frac{n}{pqr}\\ &= n\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} - \frac{1}{pqr}\right)\\ &= n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

Uma contagem bacana é o número de maneiras de permutar n elementos de modo que nenhum deles fique em sua posição original. Essas permutações são conhecidas como *desarrumações* ou *permutações caóticas.*

Lema 1. *A quantidade de permutações caóticas de n elementos é*

$$D_n = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

Demonstração: Seja A_i o conjunto das permutações em que i fica no seu lugar original (ou seja, i é um *ponto fixo*). Assim, $|A_i| = (n-1)!$ (basta fixar o i e permutar o resto), $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ para $i \neq j$ (fixe i e j e permute o resto), e assim por diante. Pelo princípio da inclusão-exclusão, a quantidade de permutações caóticas é

$$n! - \sum_{k=1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Vale a pena encontrar uma recursão para as permutações caóticas. Sendo D_n o número de permutações caóticas com n elementos, podemos dividi-las em dois conjuntos, de acordo com o último elemento da permutação caótica.

- Se o último elemento é k e o k-ésimo elemento é n, há $n-1$ escolhas para k e D_{n-2} escolhas para as posições dos outros $n-2$ elementos. Total: $(n-1)D_{n-2}$.

- Se o último elemento é k é o k-ésimo elemento não é n, há $n-1$ escolhas para k e D_{n-1} escolhas para as posições dos outros $n-1$ elementos (em que tratamos n como se fosse k). Total: $(n-1)D_{n-1}$.

Então, somando os dois casos temos $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$, como $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$.

Enfim, uma última observação: se fizermos n muito grande, $D_n/n!$ fica muito próximo de $1/e$, em que $e \approx 2,72$ é a constante de Euler. Ou seja, a probabilidade de um sorteio de amigo secreto dar certo é próxima de $1/e \approx 36{,}8\%$.

Exemplo 6. *Seja $p_k(n)$ o número de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com exatamente k pontos fixos (ou seja, com k elementos em suas respectivas posições originais). Prove que*

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n) = n!$$

Solução: Temos $p_k(n) = \binom{n}{k} D_{n-k}$ (escolhemos os k pontos fixos e "desarrumamos" os outros $n-k$ elementos). Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(n-k)!}{i!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(n-k)!}{i!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!} \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{k!\,i!}\end{aligned}$$

Um jeito de fazer essa soma é abrir "triangularmente":

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n) = &\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{k!\,i!} \\ = &\frac{1}{0!\,0!} - \frac{1}{0!\,1!} + \frac{1}{0!\,2!} - \cdots + (-1)^{n-2} \frac{1}{0!\,(n-2)!} + (-1)^{n-1} \frac{1}{0!\,(n-1)!} + \\ &\frac{1}{1!\,0!} - \frac{1}{1!\,1!} + \frac{1}{1!\,2!} - \cdots + (-1)^{n-2} \frac{1}{1!\,(n-2)!} + \\ &\cdots \\ &\frac{1}{(n-3)!\,0!} - \frac{1}{(n-3)!\,1!} + \frac{1}{(n-3)!\,2!} + \\ &\frac{1}{(n-2)!\,0!} - \frac{1}{(n-2)!\,1!} + \\ &\frac{1}{(n-1)!\,0!}\end{aligned}$$

e então podemos somar na "diagonal":

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n) &= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \frac{1}{\ell!\,(s-\ell)!} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{s!} \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \frac{s!}{\ell!\,(s-\ell)!} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{s!} \sum_{\ell=0}^{s} \binom{s}{\ell} (-1)^\ell 1^{s-\ell} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{s!} (1-1)^s = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{0^s}{s!}\end{aligned}$$

Como $0^s = 0$ exceto para $s = 0$ (pois $0^0 = 1$), todas as parcelas se cancelam, exceto a primeira. Logo

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n) = 1 \iff \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n) = n!.$$

Outra solução: Esse problema pode ser resolvido mais rapidamente com o auxílio de uma contagem dupla. Contemos o número de pares (x, π), em que x é ponto fixo da permutação π. Contando por π, cada uma de $p_k(n)$ permutações tem k pontos fixos, ou seja, o total é

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n).$$

Contando por x, x é ponto fixo de exatamente de $(n-1)!$ permutações. Então, como há n escolhas para x, o mesmo total é $n \cdot (n-1)! = n!$. Logo

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k(n) = n!.$$

Podemos generalizar o princípio da inclusão-exclusão colocando *pesos* nos elementos da união.

Teorema 2 (Princípio da Inclusão-Exclusão Generalizado)**.** *Seja A finito e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Defina*

$$f(B) = \sum_{x \in B} f(x).$$

e $f(\emptyset) = 0$. Se $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ então

$$f(A) = \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

A demonstração dessa generalização é análoga ao caso particular e fica a cargo do leitor. Tente!

Você se lembra do exemplo do $\phi(n)$?

Exemplo 7. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}$ os números entre 1 e n primos com n. Prove que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{\phi(n)}{6}(2n^2 + (-1)^k p_1 p_2 \ldots p_k),$$

sendo $p_1, p_2, \ldots, p_k$ os divisores primos de n.

Solução: Defina $f(x) = x^2$ e $f(A) = \sum_{x \in A} f(x)$. Sendo A_i a quantidade de múltiplos de p_i entre 1 e n, queremos

$$f(\{1, 2, \ldots, n\}) - f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$$

Mas

$$f(\{1, 2, \ldots, n\}) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

e

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{I\neq\emptyset}(-1)^{|I|+1} f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

Enfim, sendo

$$f(A_i) = p_i^2 + 2p_i^2 + \cdots + \left(\frac{n}{p_i}p_i\right)^2 = p_i^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{n}{p_i}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p_i}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{n}{p_i}\right)\right)$$

e

$$f(A_i \cap A_j) = (p_ip_j)^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{n}{p_ip_j}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p_ip_j}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{n}{p_ip_j}\right)\right)$$

para $i \neq j$ e assim por diante, temos

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - \sum_{I\neq\emptyset}(-1)^{|I|+1} f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + \sum_{I\neq\emptyset}(-1)^{|I|} f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \end{aligned}$$

Sendo

$$\sum_{I\neq\emptyset}(-1)^{|I|} f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) =$$

$$\sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|}\prod_{i\in I} p_i^2\left(\frac{1}{3}\left(n\prod_{i\in I}\frac{1}{p_i}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(n\prod_{i\in I}\frac{1}{p_i}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(n\prod_{i\in I}\frac{1}{p_i}\right)\right)$$

temos

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= \frac{n^3}{3}\left(1 + \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}}\prod_{i\in I}\prod_{i\in I}\frac{-1}{p_i}\right) + \frac{n^2}{2}\left(1 + \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}}\prod_{i\in I}\prod_{i\in I}(-1)^{|I|}\right) \\ &\quad + \frac{n}{6}\left(1 + \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}\\ I\neq\emptyset}}\prod_{i\in I}\prod_{i\in I}(-p_i)\right) \\ &= \frac{n^3}{3}\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + \frac{n^2}{2}\prod_{i=1}^{k}(1-1) + \frac{n}{6}\prod_{i=1}^{k}(1-p_i) \\ &= \frac{n^3}{3}\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + \frac{n^2}{2}\prod_{i=1}^{k}(1-1) + \frac{n}{6}\prod_{i=1}^{k}(-p_i)\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ &= \frac{n^2}{3}\phi(n) + \frac{\phi(n)}{6}\prod_{i=1}^{k}(-p_i) = \frac{\phi(n)}{6}(2n^2 + (-1)^k p_1p_2\ldots p_k) \end{aligned}$$

Dividindo Repetições: Contagem de Pólya

Em alguns casos, as repetições são muitas, de modo que é mais eficiente, em vez de subtrair, *dividir*. É isso que vamos fazer agora.

Vamos mostrar isso através de exemplos.

Exemplo 8. *Sejam p um número primo e n um inteiro positivo. Suponha que temos contas de n cores para formar um colar com p contas. Calcule a quantidade de colares que podem ser formados, sabendo que um colar é igual a outro se um pode ser obtido através de uma rotação.*

Solução: Em princípio, há n^p maneiras de pintar o colar. Como há p maneiras de girar o colar, há $\frac{n^p}{p}$ colares. Certo?

Errado! Note que essa fração não é inteira se n não é múltiplo de p. O que aconteceu de errado? A resposta é simples: Alguns colares geram p sequências e outras, só uma. Por exemplo, se temos três cores A, B e C e $p = 7$, o colar $ABCBABC$ gera as sete sequências $ABCBABC$, $CABCBAB$, $BCABCBA$, $ABCABCB$, $BABCABC$, $CBABCAB$ e $BCBABCA$; o colar $AAAAAAA$ só gera a sequência $AAAAAAA$.

Note que a operação que fizemos é girar. Quando a operação leva a uma repetição? Chamando a operação de σ, basta que σ^k leve à mesma sequência para algum k. Mas isso quer dizer que, sendo a sequência $(a_1, \ldots, a_p)$, $a_{i+k} = a_i$, índices vistos módulo p. Aplicando essa identidade m vezes, temos $a_{i+mk} = a_i$, indíces vistos de novo módulo p. Mas como p é primo e k está entre 1 e $p-1$, é possível encontrar m tal que $i + mk \equiv j \pmod{p}$, e temos $a_i = a_j$. Ou seja, são todos iguais. Logo, há repetição somente para colares com todas as contas iguais.

Assim, o total é $\frac{n^p-n}{p} + n = \frac{n^p-n+pn}{p}$. Note que esse exemplo mostra que $p \mid n^p - n$ para todo n inteiro.

E se não tivéssemos um número primo? Vamos começar com um composto simples.

Exemplo 9. *Suponha que temos contas de n cores para formar um colar com 6 contas. Quantos colares podemos formar agora?*

Solução: Note que há n^6 sequências com 6 cores. Quais repetem e quantas são as repetições?

A grande maioria tem 6 repetições (6 possíveis rotações). Mas colares do tipo $AAAAAA$ não formam repetição. Além disso, colares do tipo $ABABAB$ formam duas repetições ($ABABAB$ e $BABABA$) e colares do tipo $ABCABC$ e $AABAAB$ têm três repetições ($ABCABC$, $BCABCA$ e $CABCAB$). As demais repetem 6 vezes. Assim, o total de colares é

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)}{3} + \frac{n^6 - n - 4n(n-1) - n(n-1)(n-2)}{6}$$
$$= \frac{n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n}{6}$$

Só que essa maneira não é muito eficiente no caso geral. O modo mais eficiente é... contagem dupla!

Outra solução: Vamos contar de duas maneiras as sequências geradas rotacionando cada colar 6 vezes, com repetições (ou seja, a sequência $AAAAAA$ aparece 6 vezes, a sequência $ABABAB$ aparece 3 vezes, e assim por diante). Sendo N a quantidade de colares, esse total é $6N$. Por outro lado, cada uma das n^6 sequências aparece uma vez, as n^3 sequências do tipo $ABCABC$ (aqui, A, B e C não precisam ser distintos) aparecem mais uma vez (já apareceram uma vez nas primeiras n^6 sequências), as n^2 sequências do tipo $ABABAB$ aparecem mais duas vezes e as n sequências $AAAAAA$ aparecem mais duas vezes (já apareceram quatro nas possibilidades anteriores). Logo

$$6N = n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n \iff N = \frac{n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n}{6}$$

Na verdade, é possível estruturar ainda um pouco mais a solução.

Mais uma solução: Como na solução anterior, vamos contar de duas maneiras as sequências geradas rotacionando cada colar 6 vezes, com repetições. Novamente, sendo N a quantidade de colares, esse total é $6N$. Note que há 6 rotações possíveis: girar k contas, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Como as repetições ocorrem? Veja, por exemplo, os colares $ABABAB$. Ao girar 0, 2 ou 4 vezes, obtemos a mesma sequência $ABABAB$. As sequências $ABCABC$ se repetem ao girar 0 ou 3 vezes. Ou seja, as sequências repetidas aparecem porque existem rotações que geram a mesma sequência. Então, a ideia agora vai ser contar as repetições *por rotação*:

- Inicialmente, sem rotacionar, obtemos as n^6 sequências.
- Ao rodar cada sequência uma vez, obtemos repetições se, e somente se, as sequências são da forma $AAAAAA$: n repetições.
- Ao rodar cada sequência duas vezes, obtemos repetições se, e somente se, as sequências são da forma $ABABAB$: n^2 repetições.
- Ao rodar cada sequência três vezes, obtemos repetições se, e somente se, as sequências são da forma $ABCABC$: n^3 repetições.
- Ao rodar cada sequência quatro vezes, obtemos repetições se, e somente se, as sequências são da forma $ABABAB$: n^2 repetições.
- Ao rodar cada sequência cinco vezes, obtemos repetições se, e somente se, as sequências são da forma $AAAAAA$: n repetições.

Assim, novamente,

$$6N = n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n \iff N = \frac{n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n}{6}$$

Agora podemos generalizar o problema para qualquer quantidade de contas.

Exemplo 10. *Suponha que temos contas de n cores para formar um colar com k contas. Quantos colares podemos formar agora?*

Solução: Usando o mesmo argumento que a última solução anterior, vejamos quais sequências se repetem na rotação de uma sequência em m contas. Note que, sendo $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ a sequência, ela se repete na rotação de uma sequência de m contas se, e somente se, $a_i = a_{i+m}$, sendo os índices módulo k. Iterando a igualdade anterior, temos $a_{i+mx+ky} = a_i$. Mas sabemos do teorema de Bézout que $\{mx + ky : x, y \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto dos múltiplos de $\mathrm{mdc}(m, k)$. Logo devemos ter $a_{i+\mathrm{mdc}(k,m)} = a_i$, e formamos ciclos de tamanho $\mathrm{mdc}(k, m)$. Note que determinar os primeiros $\mathrm{mdc}(k, m)$ elementos da sequência a define, de modo que há $n^{\mathrm{mdc}(k,m)}$ sequências que se repetem com m rotações.

Com isso, sendo N o total de colares, pelo visto anteriormente, temos

$$k \cdot N = \sum_{m=0}^{k-1} n^{\mathrm{mdc}(k,m)} \iff N = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} n^{\mathrm{mdc}(k,m)}$$

A ideia geral, que serve para contagens desse tipo, é o seguinte lema:

Lema 2 (Lema de Burnside)**.** *Seja X um conjunto finito e G um grupo de permutações de X. Sendo* $\mathrm{fix}(g)$ *o número de elementos de X que são fixados por g (ou seja, a quantidade de elementos $x \in X$ tais que $g(x) = x$), o número de órbitas de X sob G é*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{fix}(g).$$

Antes de partir para a demonstração, vamos entender a terminologia do lema. Primeiro, observando permutações como funções, *grupo de permutações* é um conjunto G de permutações em que:

- a *identidade* $\sigma(x) = x$ pertence a G.
- se σ_1, σ_2 estão em G então a composição $\sigma_1 \circ \sigma_2(x) = \sigma_1(\sigma_2(x))$ também pertence a G.
- para todo σ em G a permutação inversa σ^{-1} pertence a G.

Além disso, *órbita* de $x \in X$ sob um conjunto G de permutações é o conjunto de todos os elementos de X obtidos a partir de G, ou seja, o conjunto $\mathrm{orb}(x) = \{g(x), g \in G\}$. Falando de modo mais informal, são os elementos que devem ser considerados "iguais" de acordo com as permutações (nos nossos exemplos, cada órbita representa um colar).

Então, basicamente o lema de Burnside conta a cardinalidade de um conjunto sendo que elementos modificados por algum grupo de permutações devem ser considerados iguais.

Vamos resolver o exemplo anterior com a terminologia do lema de Burnside (seja paciente, logo em seguida vamos demonstrá-lo!).

Ainda outra solução do exemplo 9: Queremos os colares de 6 contas com n cores. Note que sequências de seis cores devem ser consideradas o mesmo colar se podem ser obtidas entre si através de rotações, que são representadas pelas permutações de

$$\sigma_0 = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \sigma_1 = (2, 3, 4, 5, 6, 1), \sigma_2 = (3, 4, 5, 6, 1, 2),$$
$$\sigma_3 = (4, 5, 6, 1, 2, 3), \sigma_4 = (5, 6, 1, 2, 3, 4), \sigma_5 = (6, 1, 2, 3, 4, 5)$$

Note que, como fizemos na solução anterior,

$$|\operatorname{fix}(\sigma_0)| = n^6; |\operatorname{fix}(\sigma_1)| = n; |\operatorname{fix}(\sigma_2)| = n^2; |\operatorname{fix}(\sigma_3)| = n^3; |\operatorname{fix}(\sigma_4)| = n^2; |\operatorname{fix}(\sigma_5)| = n$$

de modo que, pelo lema de Burnside, o número de colares é

$$\frac{1}{6}(n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n) = \frac{n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n}{6}$$

Agora sim, vamos à demonstração do lema.

Demonstração do lema de Burnside: Contemos de duas maneiras o número de elementos de $S = \{(x, g) : g \text{ fixa } x\}$ em que $x \in X$ e $g \in G$. Contando por g, temos

$$|S| = \sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)|$$

Contando por x, seja $\operatorname{Stab}(x)$ o conjunto das permutações g que fixam x. Então

$$|S| = \sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}(x)|$$

Agora, agrupando os elementos de cada órbita, sendo N a quantidade de órbitas temos

$$|S| = \sum_{i=1}^{N} |\operatorname{Stab}(x_i)| \cdot |\operatorname{orb}(x_i)|,$$

sendo x_i um elemento qualquer de cada órbita. Note que podemos fazer isso porque elementos da mesma órbita devem ser considerados "iguais" e são fixados pelas mesmas permutações.

Agora afirmamos que $|\operatorname{Stab}(x_i)| \cdot |\operatorname{orb}(x_i)| = |G|$ para cada i. Para ver isso, note que, para todo $x \in \operatorname{orb}(x_i)$ e $g \in G$, $g(x) \in \operatorname{orb}(x_i)$. Só que $g(x)$ se repete $\operatorname{Stab}(x)$ vezes. Mas eles são fixados pelas mesmas permutações, ou seja, $\operatorname{Stab}(x) = \operatorname{Stab}(x_i)$. Logo, $|G| = \sum_{x \in \operatorname{orb}(x_i)} |\operatorname{Stab}(x)| = |\operatorname{Stab}(x_i)| \cdot |\operatorname{orb}(x_i)|$.

Com isso, é fácil finalizar o lema:

$$|S| = \sum_{i=1}^{N} |\operatorname{Stab}(x_i)| \cdot |\operatorname{orb}(x_i)| = \sum_{i=1}^{N} |G| = N \cdot |G|$$

e o resultado segue, ou seja,

$$\sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)| = N \cdot |G| \iff N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)|$$

$\square$

Exemplo 11. *De quantas maneiras podemos pintar as faces de um cubo, se temos n cores disponíveis? Pinturas que podem ser obtidas através de movimentos do cubo devem ser consideradas iguais.*

Solução: O grupo G de transformações que mantêm o cubo são:

- a identidade, que fixa n^6 elementos;
- seis rotações de $90°$ em torno de uma face, que fixa n^3 elementos (uma "faixa" de quatro faces de mesma cor e as outras duas faces);
- três rotações de $180°$ em torno de uma face, que fixa n^4 elementos (dois pares de faces opostas da mesma cor e as outras duas faces);
- oito rotações de $120°$ em torno de um vértice, que fixa n^2 elementos (três faces incidentes no vértice da mesma cor e as outras três faces da mesma cor);
- seis rotações de $180°$ em torno do eixo que liga os pontos médios de duas arestas opostas, que fixa n^3 elementos (duas faces adjacentes a uma das arestas da mesma cor, duas faces adjacentes à outra aresta da mesma cor e as outras duas faces, opostas entre si, da mesma cor).

Pelo lema de Burnside, o total de cubos é

$$\frac{n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 8n^2 + 6n^3}{1 + 6 + 3 + 8 + 6} = \frac{n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2}{24}$$

Problemas

1. (OBM) Três polígonos regulares, de 8, 12 e 18 lados respectivamente, estão inscritos em uma mesma circunferência e têm um vértice em comum. Os vértices dos três polígonos são marcados na circunferência. Quantos vértices distintos foram marcados?

2. Quantos inteiros positivos menores ou iguais a 2000 são múltiplos de 3 ou 4, mas não de 5?

3. (OBM) Um quadrado de lado 3 é dividido em 9 quadrados de lado unitário, formando um quadriculado. Cada quadrado unitário é pintado de azul ou vermelho. Cada cor tem probabilidade $1/2$ de ser escolhida e a cor de cada quadrado é escolhida independentemente das demais. Qual a probabilidade de obtermos, após colorirmos todos os quadrados unitários, um quadrado de lado 2 pintado inteiramente de uma mesma cor?

4. (IME) Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

5. No primeiro dia de uma competição matemática, vinte pessoas tiraram uma foto em grupo, em fila. No último dia, tiraram outra foto, de modo que todos tinham ou novo vizinho à sua direita. De quantas maneiras eles poderiam fazer isso?

6. (Canadá) Seja n um inteiro positivo, e $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Mostre que o número de permutações de S sem pontos fixos e o número de permutações de S com exatamente um ponto fixo tem diferença exatamente 1.

7. (IMO) Dizemos que uma permutação $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ de $\{1, 2, \dots, 2n\}$ tem a propriedade P quando $|x_i - x_{i+1}| = n$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$. Mostre que, para cada n, há mais permutações com a propriedade P do que sem a propriedade P.

8. Seja S um conjunto finito e k um inteiro positivo. Determine o número de k-uplas $(S_1, S_2, \dots, S_k)$ de subconjuntos de S tais que $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k = \emptyset$.

9. Sendo m e n inteiros positivos, defina

$$S(m,n) = \binom{n}{0}(2^n - 1)^m - \binom{n}{1}(2^{n-1}-1)^m + \binom{n}{2}(2^{n-2}-1)^m - \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

Prove que $S(m,n) = S(n,m)$.

10. De quantas maneiras podemos pintar um tabuleiro $1 \times n$, sendo que cada casinha pode ter uma de k cores? Duas pinturas são considerados iguais quando uma pode ser obtido a partir do outra através de uma rotação.

11. De quantas podemos pintar os vértices de um cubo, se temos n cores disponíveis? Pinturas que podem ser obtidas através de movimentos do cubo devem ser consideradas iguais.

12. De quantas maneiras podemos pintar um tabuleiro $n \times n$, sendo que cada casinha pode ter uma de k cores? Duas pinturas são considerados iguais quando uma pode ser obtido a partir da outra através de uma rotação.

13. Teoricamente, quantas moléculas diferentes podemos formar com um átomo de carbono e radicais de hidrogênio $(-H)$, metil $(-CH_3)$, etil $(-C_2H_5)$ e cloro $(-C\ell)$? Cada radical pode ser utilizado quantas vezes forem necessárias (ou seja, de 0 a 4 vezes).

Bibliografia

1. T. Andreescu e Z. Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser 2003.

2. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

3. A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. Pinto Carvalho e P. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM.

4. C. Chuan-Chong e K. Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific 1992.

5. T. Davis, *Pólya's Counting Theory.*

6. C. C. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill 1968.

Respostas, Dicas e Soluções

1. 28. Sendo A_k a quantidade de pontos do polígono de k vértices, queremos calcular $|A_8 \cup A_{12} \cup A_{18}|$. Aí é só notar que $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}| = \text{mdc}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

2. 800. Sendo A_i o conjunto dos múltiplos de i entre 1 e 2000, queremos $|(A_3 \cup A_4) \setminus A_5| = |(A_3 \setminus A_5) \cup (A_4 \setminus A_5)|$. Como $A_3 \cap A_5 = A_{15}$ e $A_4 \cap A_5 = A_{20}$, $|A_3 \setminus A_5| = |A_3| - |A_{15}| = 666 - 133 = 533$ e $|A_4 \setminus A_5| = |A_4| - |A_{20}| = 500 - 100 = 400$. Enfim, $|(A_3 \setminus A_5) \cap (A_4 \setminus A_5)| = |(A_3 \cap A_4) \setminus A_5| = |A_{12} \setminus A_5| = |A_{12}| - |A_{60}| = 166 - 33 = 133$.

3. $\frac{95}{256}$. Primeiro note que, como não é possível haver um quadrado 2×2 azul e um quadrado 2×2 vermelho ao mesmo tempo, a probabilidade pedida é duas vezes a probabilidade de haver um quadrado 2×2 azul. Há quatro possibilidades para o quadrado 2×2; sendo A_i o conjunto das pinturas contendo o quadrado i, queremos $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. Note que $A_i \cap A_j$ consiste em pintar a região da união dos quadrados correspondentes de azul e escolher as cores das outras casinhas.

4. $2088960 = \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} \frac{5!}{(5-i)!} 2^i (10-2i)! = 10! - 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8! + \binom{5}{2} 5 \cdot 4 \cdot 2^2 \cdot 6! - \binom{5}{3} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4! + \binom{5}{4} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2! + 5! \cdot 2^5$. Considere A_i como sendo as distribuições em que a equipe i fica lado a lado.

5. $19!\left(20 - \frac{19}{1!} + \frac{18}{2!} - \cdots - \frac{1}{19!}\right)$. Sendo A_i o conjunto das distribuições em que o aluno i tem como seu vizinho da direita o aluno $i+1$. Queremos $20! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}|$. Mas $|A_i| = 19!$ (permute o bloco $i, i+1$ como se fosse uma coisa só) e a interseção de k conjuntos tem cardinalidade $(20-k)!$ (junte blocos de consecutivos; cada "junta" diminui o número de objetos para permutar em uma unidade).

6. As permutações sem pontos fixos são as permutações caóticas, que são, como vimos, $D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$. Contemos as permutações com exatamente um ponto fixo: há n escolhas para o ponto fixo e $D_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{k!}$ maneiras de permutar os demais $n-1$ elementos sem pontos fixos adicionais. Assim, o total de permutações com exatamente um ponto fixo é $n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{k!}$. A diferença é igual ao último termo de D_n, que é $(-1)^n \frac{n!}{n!} = (-1)^n$. Então, a diferença (em módulo) é 1.

7. **Uma solução** usa as *desigualdades de Bonferroni*: se truncamos a fórmula de inclusão-exclusão logo depois de um sinal de mais, obtemos um valor maior ou igual ao total; se truncamos logo depois de um sinal de menos, obtemos um valor menor ou igual. Com isso, considerando os pares $\{1, n+1\}$, $\{2, n+2\}$, ..., $\{n, 2n\}$ dos termos cuja diferença é n, há $\binom{n}{k} 2^k (2n-k)!$ permutações com pelo menos k dos pares em posições consecutivos: escolhemos os k pares que aparecem lado a lado na permutação, permutamos dentro de cada um dos k pares e permutamos os $2n-2k$

números que sobraram e os k pares em blocos. Com isso, o total N de permutações *sem* a propriedade P é $N \le (2n)! - \binom{n}{1}2(2n-1)! + \binom{n}{2}2^2(2n-2)! = \binom{n}{2}2^2(2n-2)!$. Mas

$$\frac{N}{(2n)!} \le \frac{\binom{n}{2}2^2(2n-2)!}{(2n)!} = \frac{n-1}{2n-1} < \frac{1}{2},$$

logo há menos permutações *sem* a propriedade P do que com.

Outra solução é usar bijeções. Vamos fazer uma bijeção entre as permutações sem a propriedade P e um subconjunto próprio das permutações com a propriedade P. A ideia é simples: sendo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sem a propriedade P, encontramos $x_j = x_i \pm n$ e tomamos $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_j, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$. Note que essa permutação só tem um par de consecutivos com diferença n, e não é difícil notar que (i) f é inversível (basta encontrar o par com diferença n e mover o segundo número do par para a primeira posição) e (ii) há outras permutações com a propriedade P que não foram consideradas (por exemplo, as com dois pares com diferença n). Com isso, o problema está resolvido.

8. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Seja A_i o conjunto das k-uplas em que $i \notin S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$. Queremos, então, $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$. Mas $|A_i| = (2^{n-1})^k$ e a interseção de m conjuntos A_i tem $(2^{n-i})^k$ elementos. Assim, o total pedido é

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(2^{n-i})^k = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(2^k)^{n-i} + 2^{kn} = 2^{kn} - (2^k - 1)^n$$

9. O somatório do problema é

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(2^{n-i} - 1)^k,$$

que é *muito parecido* com o resultado do problema anterior. As mudanças são:

- Uma troca de sinais;
- A inclusão do termo para $i = 0$;
- $2^{n-i} - 1$ no lugar de 2^{n-i}.

Com um pouco de esforço, vemos que $S(m, n)$ é, na verdade, a quantidade de m-uplas $(S_1, S_2, \dots, S_m)$ de subconjuntos *não vazios* de $\{1, 2, \dots, n\}$, tais que $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m \neq \emptyset$.

Como provar que $S(n, m) = S(m, n)$? Mais um trabalho para uma bijeção! Considere a tabela $m \times n$ em que a entrada (i, j) é marcada se, e somente se, $j \in S_i$. Que características essa tabela tem? Ela não tem linha sem marcas, já que $S_i \neq \emptyset$ para todo i e não tem coluna sem marcas, pois a interseção dos S_i's é não vazia. Então, podemos interpretar $S(m, n)$ como *o número de maneiras de marcar células em uma tabela $m \times n$ de modo que nenhuma linha e nenhuma colua fique sem casas marcadas.* Mas isso é obviamente o mesmo número de maneiras de marcar células em uma tabela $n \times m$ (é só transpor a tabela!), e logo $S(n, m) = S(m, n)$.

10. $\frac{k^n+k^{\lceil n/2\rceil}}{2}$. A única operação é "virar a faixa", e ela fixa $k^{\lceil n/2\rceil}$ tabuleiros (pinte só até a metade e depois copie as cores de trás para frente).

11. As transformações são as mesmas do exemplo 11. O total é $\frac{n^8+6n^2+3n^4+8n^4+6n^2}{24} = \frac{n^8+11n^4+12n^2}{24}$.

12. Há quatro rotações: a identidade, que fixa k^{n^2} tabuleiros, as duas rotações de $90°$, que fixa $k^{\lceil n^2/4\rceil}$ tabuleiros, e a rotação de $180°$, que fixa $k^{\lceil n^2/2\rceil}$ tabuleiros. Total: $\frac{k^{n^2}+2k^{\lceil n^2/4\rceil}+k^{\lceil n^2/2\rceil}}{4}$.

13. Os radicais formam um tetraedro regular. Há quatro transformações no grupo:

    - a identidade, que fixa as 4^4 possibilidades;
    - oito rotações de $120°$ em torno de um dos vértices do tetraedro, que fixa 4^2 possibilidades (o radical do vértice e o outro radical que vai ficar nos outros três vértices);
    - três rotações de $180°$ em torno da reta que liga pontos médios de arestas opostas, que fixa também 4^2 possibilidades (o radical dos dois vértices de uma das arestas e o radical dos outros dois vértices, que são as extremidades da outra aresta).

    Assim, o total é $\frac{4^4+8\cdot 4^2+3\cdot 4^2}{1+8+3} = 36$.