Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 7

Princípio da Casa dos Pombos

Apesar de ser um princípio bastante simples, o princípio da casa dos pombos é uma das armas mais poderosas da matemática. Talvez o fato de ser uma ideia simples é que a torna tão poderosa.

Proposição 1 (Casa dos pombos). *Dados n objetos e menos de n gavetas, ao guardarmos os objetos nas gavetas obtemos pelo menos uma gaveta com mais de um objeto.*

É claro que podemos quantificar melhor essa ideia:

Proposição 2 (Casa dos pombos (quantificado)). *Dados n objetos para serem guardados em k gavetas, existe uma gaveta com pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ objetos.*

Demonstração: Suponha por absurdo que todas as gavetas têm menos de $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ objetos. Então cada uma das k gavetas tem uma quantidade de objetos menor ou igual a $\frac{n-1}{k}$. Mas então há no máximo $k \cdot \frac{n-1}{k} = n - 1$ objetos, o que é absurdo. Logo uma gaveta tem pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ objetos. $\square$

Note que o princípio da casa dos pombos nos mostra que *algo existe sem exibi-lo*. De fato, sabemos que existem $\binom{n+k-1}{n}$ maneiras de guardar n objetos em k gavetas. O que o princípio das casas dos pombos diz é que em *toda* distribuição de objetos em gavetas tem uma gaveta com pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ objetos. Como são muitas maneiras de distribuir os objetos, é claro que o princípio não consegue indicar qual é a gaveta com muitos objetos.

Quando usar casa dos pombos? (Des)formalizando o princípio

Note que, implicitamente, o que fazemos ao colocar os objetos nas gavetas? Há vários aspectos a considerar:

- Primeiro, note ao supor a existências de objetos e gavetas, estamos considerando *dois tipos de entidades*. Então podemos considerar dois conjuntos: o conjunto A dos objetos e o conjunto B das gavetas.

- Segundo, ao colocar cada objeto em uma gaveta, estamos *associando a cada objeto uma única gaveta*, ou seja, estamos associando a cada $x \in A$ um único $y \in B$. Que tipo de associação é essa?

Pensando um pouco, a resposta é clara: *casa dos pombos é um resultado sobre funções.* Formalizando, temos

Proposição 3 (Casa dos pombos (com funções))**.** *Dados dois conjuntos finitos A e B e uma função $f\colon A \to B$, existe um elemento $y \in B$ que está associado a pelo menos $\left\lfloor \frac{|A|-1}{|B|} \right\rfloor + 1$ elementos de A.*

Por outro lado, vale a pena ter uma noção intuitiva do princípio. Imaginando que temos "muitos" objetos para "poucas" gavetas, temos a seguinte ideia:

Proposição 4 (Casa dos pombos (intuitivo))**.** *Se colocamos muitos objetos em poucas gavetas, existe uma gaveta com muitos objetos.*

Como funções aparecem muito na Matemática, é natural que o princípio da casa dos pombos tenha inúmeras aplicações. Vejamos algumas, começando com a própria combinatória:

Exemplo 1. *Mostre que se há n pessoas em uma festa, então duas delas conhecem o mesmo número de pessoas entre as presentes.*

Solução: Cada pessoa pode conhecer entre 0 e $n-1$ pessoas na festa. Infelizmente, há n pessoas e n possibilidades, e isso ainda não nos permite usar o princípio da casa dos pombos. Mas o único caso que dá errado é o caso em que todas as possibilidades aparecem exatamente uma vez; ou seja, existem ao mesmo tempo uma pessoa que conhece *todas as outras* $n-1$ pessoas na festa e uma pessoa que conhece *zero* pessoa na festa. Isso não pode ocorrer, então o problema está resolvido.

Note que, implicitamente, definimos uma função f do conjunto das pessoas na festa em $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ em que $f(x)$ é a quantidade de pessoas que x conhece.

Agora, uma aplicação à geometria:

Exemplo 2. *(OBM) No interior de um quadrado de lado* 16 *são colocados* 1000 *pontos. Mostre que é possível colocar um triângulo equilátero de lado* $2\sqrt{3}$ *no plano de modo que ele cubra pelo menos* 16 *destes pontos.*

Solução: Como $\left(\frac{16}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{64}{3} = 21 + \frac{1}{3}$ está entre $4{,}5^2 = 20{,}25$ e 5^2 e a altura do triângulo é $\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3$, podemos cobrir um quadrado de lado 16 com $2 \cdot 5 \cdot \left\lceil \frac{16}{3} \right\rceil = 60$ triângulos equiláteros. Pelo princípio da casa dos pombos existe um triângulo com pelo menos $\left\lfloor \frac{1000-1}{60} \right\rfloor + 1 = 17$ pontos.

A função agora é f do conjunto A dos 1000 pontos no conjunto B dos triângulos equiláteros, sendo $f(x)$ o triângulo ao qual o ponto x pertence.

Enfim, uma aplicação à Análise, que origina o teorema de Kronecker, que tem diversas aplicações em teoria dos números.

Exemplo 3. *Seja x real. Prove que dentre os números*

$$x, 2x, \dots, (n-1)x$$

existe um que difere de um inteiro por no máximo $1/n$.

Solução: O que importa nesse problema é o que está à direita da vírgula dos números $x, 2x, \ldots, (n-1)x$, então consideremos a *parte fracionária* de kx, ou seja, $\{kx\} = kx - \lfloor kx \rfloor$. As nossas "casas" são os n intervalos $[0, 1/n)$, $[1/n, 2/n)$, …, $[(n-1)/n, 1)$.

Por azar, só temos $n-1$ números! O que fazer? Na verdade, só $n-2$ intervalos são interessantes: se algum $\{kx\}$ pertence a $[0, 1/n)$ ou $[(n-1)/n, 1)$, o problema acabou, pois kx difere de um inteiro por no máximo $1/n$ (por cima no primeiro caso e por baixo no segundo). Então suponha que todos os números $\{x\}$, $\{2x\}$, …, $\{(n-1)x\}$ estão nos outros $n-2$ intervalos. Pelo princípio da casa dos pombos, existem dois números $\{ix\}$ e $\{jx\}$ no mesmo intervalo, $i > j$. Mas aí $\{(i-j)x\}$ pertence a $[0, 1/n)$ ou $[(n-1)/n, 1)$, e $1 \le i - j \le n - 2$, contradição.

Qual é a função aqui? Tente descobrir.

Enfim, uma aplicação bastante criativa na teoria dos números.

Exemplo 4. *(OBM) Mostre que existe um número da forma* $199\ldots91$ *(com pelo menos três noves) que é múltiplo de* 1991.

Solução: Considere todos os infinitos números da forma $199\ldots91$. Como há somente 1991 restos na divisão por 1991, existem dois desses números com o mesmo resto. Mas isso quer dizer que a diferença entre eles, que é da forma $199\ldots980\ldots0$, é múltiplo de 1991. Sendo $\mathrm{mdc}(10, 1991) = 1$, podemos eliminar os zeros à direita. Mas deixemos três deles no final: $199\ldots98000$ é múltiplo de 1991. Somando 1991 obtemos o resultado: $199\ldots99991$ é múltiplo de 1991. Como temos o 8 em $199\ldots98000$, esse número tem pelo menos três noves.

Formulação com médias

Outra formulação extremamente útil do princípio da casa dos pombos é a formulação com médias.

Proposição 5 (Casa dos pombos (médias))**.** *Dada uma quantidade finita de números, pelo menos um dos números é menor ou igual à média e pelo menos um dos números é maior ou igual à média.*

Fica a cargo do leitor fazer a formulação com funções e a demonstração.

Observação 1. *Note que, em algum momento, citamos média* aritmética*. Esse princípio vale para todo tipo de média, incluindo a média geométrica, harmônica, quadrática…*

Exemplo 5. *Quinze cadeiras estão colocadas ao redor de uma mesa circular e sobre esta estão colocados, em frente a cada uma das cadeiras, o nome de* 15 *convidados. Ao chegarem, os convidados não percebem isto e nenhum senta-se em frente ao seu nome. Prove que a mesa pode ser girada de forma que pelo menos dois convidados fiquem corretamente sentados.*

Solução: Podemos girar a mesa de 15 maneiras, e há um total de 15 coincidências de nome com convidado (cada convidado vai estar à frente do seu próprio nome). Em média, então, há $15/15 = 1$ coincidência, o que mostra que há uma maneira com pelo menos uma coincidência. Não parece muito útil, não? Mas sabemos que em uma maneira não há coincidências, ou seja, uma maneira está abaixo da média. Assim, há uma *acima* da média, e conseguimos o que queremos.

Essa formulação fica particularmente interessante se aliada a ideias de contagem dupla. Vamos incrementar um pouco o exemplo anterior:

Exemplo 6. *Tomamos dois círculos concêntricos, um de raio* 2 *dividido em* 200 *setores iguais, pintados de preto e branco, com* 100 *setores de cada cor, e outro de raio* 1 *também dividido em* 200 *setores iguais, mas pintados arbitrariamente de preto e branco. Prove que podemos girar o círculo menor, de forma que as cores deste coincidam com as do maior em pelo menos* 100 *setores.*

Solução: Gire o círculo de raio 1 de todas as 200 maneiras e conte as vezes em que as cores coincidem. Cada setor do círculo menor coincide com exatamente 100 setores do círculo maior, então a quantidade de coincidências é $200 \cdot 100$. Com isso, a média de coincidências é $\frac{200 \cdot 100}{200} = 100$. Pelo princípio da casa dos pombos, alguma maneira tem pelo menos 100 coincidências (e alguma tem no máximo 100 coincidências também).

Problemas

1. (OBM) Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. Determine o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor.

2. Dezenove flechas são arremessadas sobre um alvo com formato de um hexágono regular de lado 1. Mostre que duas destas flechas estão a uma distância de no máximo $\sqrt{3}/3$ uma da outra.

3. (a) Mostre que de quaisquer 52 inteiros é sempre possível escolher um par cuja soma ou diferença é divisível por 100.

   (b) Seja $k \geq 1$ um número natural. Determine o menor inteiro n com a seguinte propriedade: para qualquer escolha de n inteiros haverá um par cuja soma ou diferença é divisível por $2k + 1$.

4. Dado um inteiro n, mostre que existe um múltiplo de n que se escreve com os algarismos 0 e 1 apenas. (Por exemplo, se $n = 3$, temos 111 ou 1011, etc...)

5. Dado um conjunto de dez naturais entre 1 e 99 inclusive, prove que há dois subconjuntos disjuntos não vazios cujas somas de seus elementos são iguais.

6. (OBM) Qual é a maior quantidade de números do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?

7. (OBM) Qual é o menor valor de $n > 1$ para o qual é possível colocar n peças sobre um tabuleiro $n \times n$ de modo que não haja duas peças sobre a mesma linha, mesma coluna ou mesma diagonal?

8. (OBM) Qual é o menor inteiro positivo n para o qual qualquer subconjunto de n elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ contém dois números cuja diferença é 8?

9. (OBM) Um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ é *superpar* quando quaisquer dois de seus elementos têm produto par. Qual é a maior quantidade de elementos de um subconjunto superpar?

10. (OBM) Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ que não contém dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?

11. Sejam n pontos do plano tais que não há dois pares de pontos equidistantes. Une-se, por um segmento, cada ponto ao mais próximo. Prove que nenhum ponto está ligado a mais de cinco pontos.

12. (OBM) Um professor de inglês dá aula particular para uma classe de 9 alunos, dos quais pelo menos um é brasileiro. Se o professor escolher 4 alunos para fazer uma apresentação, terá no grupo pelo menos dois alunos de mesma nacionalidade; se escolher 5 alunos, terá no máximo três alunos de mesma nacionalidade. Quantos brasileiros existem na classe?

13. (OBM) Carlinhos pensa num número ímpar positivo menor do que 100. Pedrinho se dispõe a descobrir que número é esse fazendo a seguinte pergunta, quantas vezes forem necessárias: "O número que você pensou é maior, menor ou igual a x?". Note que x é um número que Pedrinho escolhe.

    Quantas perguntas desse tipo Pedrinho poderá ter que fazer até descobrir o número pensado por Carlinhos?

14. Durante seu treinamento um jogador de xadrez joga pelo menos uma vez por dia e não mais do que 12 vezes por semana. Prove que há um período de dias consecutivos no qual ele joga exatamente 20 vezes.

15. Escolhem-se 55 elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Prove que dois destes elementos terão como diferença 9, outros dois, 10 e outro par, 12, mas que não haverá obrigatoriamente um par cuja diferença seja 11.

16. (Cone Sul) Considere o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada inteiro k, seja r_k a maior quantidade de elementos distintos de A que podemos escolher de maneira que a diferença entre dois números escolhidos seja sempre diferente de k. Determine o maior valor possível de r_k, onde $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

17. (EUA) Um círculo é dividido em 432 setores congruentes por 432 pontos. Esses pontos são pintados de quatro cores de modo que alguns 108 pontos estão pintados de vermelho, alguns 108 estão pintados de verde, alguns 108 pontos estão pintados de azul e os demais 108 pontos estão pintados de amarelo. Prove que é possível escolher três pontos de cada cor de modo que os quatro triângulos formados pelos pontos escolhidos de mesma cor são congruentes.

18. (OBM) Seja S um conjunto de n elementos. Determine o menor inteiro positivo k com a seguinte propriedade: dados quaisquer k subconjuntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de S, existe uma escolha adequada dos sinais $+$ e $-$ de modo que $S = A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup \cdots \cup A_k^{\pm}$ onde $A_i^{+} = A_i$ e $A_i^{-} = S - A_i$ é o complementar de A_i em relação a S.

Bibliografia

1. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

2. C. Chuan-Chong e K. Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific 1992.

3. C. C. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill 1968.

Respostas, Dicas e Soluções

1. 38. Podemos pegar as 10 bolas pretas ou brancas e 9 de cada uma das outras cores, ou seja, existe um contraexemplo com 37 bolas. Agora, se há 38 bolas, pelo menos 28 são de uma das três cores vermelho, verde ou azul, e aí aplicamos o princípio da casa dos pombos.

2. Divida o hexágono em seis triângulos equiláteros e cada triângulo equilátero em três quadriláteros traçando a perpendicular a partir de seu centro a cada um dos lados.

3. Para o item (a), considere as 51 "casas" $\{0\}$, $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, $\ldots$, $\{49, 51\}$, $\{50\}$ e considere os restos da divisão dos números por 100 como "pombos". O item (b) é só uma generalização; a resposta é $k + 2$. Use as casas para achar um contraexemplo com $k + 1$ números.

4. Considere os números da forma $1111 \ldots 1$ e veja o exemplo 4.

5. Seja a o menor elemento do conjunto. Então a soma dos subconjuntos está entre a e $a + 99 + 98 + \cdots + 91$, ou seja, há no máximo $91 + 92 + \cdots + 99 + 1 = 95 \cdot 9 + 1$ valores possíveis para $2^{10} - 1 = 1023$ subconjuntos possíveis. Como $95 \cdot 9 + 1 < 100 \cdot 10 = 1000 < 1023$, há dois subconjuntos com a mesma soma. Eles podem não ser disjuntos; mas se não forem, basta eliminar a interseção de ambos que as somas continuam iguais.

6. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{3, 6, 12\}$, $C = \{5, 10, 20\}$, $D = \{7, 14\}$, $E = \{9, 18\}$ e $F = \{11, 13, 15, 17, 19\}$. Podemos tomar no máximo três elementos de A (1, 4, 16), dois de B (5 e 20), dois de C (5 e 20), um de D, um de E e todos os cinco de F. Um total de $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 5 = 14$ elementos. Se tomarmos 15 elementos, algum dos conjuntos vai ter mais elementos do que permitido e o princípio da casa dos pombos garante a existência de dois números, um igual ao dobro do outro.

7. $n = 4$.

8. Considere os doze conjuntos $\{1,9\}$, $\{17\}$, $\{2,10\}$, $\{18\}$, $\{3,11\}$, $\{19\}$, $\{4,12\}$, $\{20\}$, $\{5,13\}$, $\{6,14\}$, $\{7,15\}$, $\{8,16\}$. Não podemos tomar dois elementos do mesmo conjunto (e existe um exemplo com um elemento de cada conjunto), então a resposta é 13.

9. Um conjunto superpar não pode ter dois ímpares, então a resposta é 11 (um ímpar e os 10 pares).

10. Considere os conjuntos $\{1,4,9,16,25\}$, $\{2,8,18\}$, $\{3,12,24\}$, $\{6,24\}$. Podemos tomar no máximo um elemento de cada conjunto, e todos os demais $25-5-3-3-2=12$ números, totalizando 16 números.

11. Suponha, por absurdo, que um ponto P está ligado a outros seis pontos $P_1, P_2, \ldots, P_6$, numerados no sentido anti-horário. Então um dos ângulos $\angle P_iPP_{i+1}$ (em que $P_7 = P_1$) é menor ou igual à média $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Então, no triângulo P_iPP_{i+1}, $\angle P_iP_{i+1}P \geq 60^\circ \geq \angle P_iPP_{i+1}$ ou $\angle P_{i+1}P_iP \leq 60^\circ \geq \angle P_iPP_{i+1}$. Mas isso quer dizer que $P_iP_{i+1} < PP_i$ ou $P_iP_{i+1} < PP_i$; suponha, sem perdas, $P_iP_{i+1} < PP_i$. Então o ponto mais próximo de P_i não é P, o que quer dizer que o ponto mais próximo de P é P_i. Mas então $PP_{i+1} > PP_i > P_iP_{i+1}$ e o ponto mais próximo de P_{i+1} não é P, o que é um absurdo.

12. 3. A primeira condição diz que há no máximo 3 nacionalidades; a segunda... que há no máximo 3 alunos de cada nacionalidade. Como há exatamente 9 alunos, tem que ter três de cada nacionalidade.

13. 5. Há 50 possibilidades no começo. Cada pergunta reduz as possibilidades de k para no mínimo $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ possibilidades.

14. Seja x_i o número de partidas no dia i e considere as somas $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_3 = x_1 + x_2 + x_3, \ldots$. Como ele joga pelo menos uma vez por dia, as somas são todas distintas. Considere agora k semanas de treinamento. Então há $7k$ somas, todas de 1 a $12k$, e queremos um período de dias em que ele joga exatamente 20 vezes, ou seja, $x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_j = 20 \iff s_j - s_i = 20$. Escolha um k grande o suficiente e proceda como no problema 8.

15. Veja o problema 8: considere conjuntos $\{i, i+9\}$, $\{i, i+10\}$, $\{i, i+12\}$ e $\{i, i+11\}$ (nesse último caso, para ajudar a montar um exemplo).

16. A generalização do problema anterior. Seja $n = 2kq + r$, $0 \leq r < 2k$ a divisão euclidiana de n por $2k$. Se a diferença entre dois números é k, então os dois números deixam o mesmo resto na divisão por k. Considere então os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{x \in A \mid x \equiv 1 \pmod{k}\} = \{1, k+1, \ldots\}\\
A_2 &= \{x \in A \mid x \equiv 2 \pmod{k}\} = \{2, k+2, \ldots\}\\
A_3 &= \{x \in A \mid x \equiv 3 \pmod{k}\} = \{3, k+3, \ldots\}\\
&\vdots\\
A_k &= \{x \in A \mid x \equiv k \pmod{k}\} = \{k, 2k, \ldots\}
\end{aligned}$$

Note que dois elementos de conjuntos diferentes não podem ter diferença igual a k. Além disso, dois elementos de um mesmo conjunto têm diferença igual a k se, e somente se, são consecutivos dentro do conjunto.

Se $r \le k$, a quantidade de elementos de cada conjunto é

$$|A_i| = \begin{cases} 2q+1 & , \text{se } 1 \le i \le r \\ 2q & , \text{se } r < i \le k \end{cases}$$

Se $k \le r < 2k$, a quantidade de elementos de cada conjunto é

$$|A_i| = \begin{cases} 2q+2 & , \text{se } 1 \le i \le r-k \\ 2q+1 & , \text{se } r-k < i \le k \end{cases}$$

Se escolhermos mais de $q+1$ elementos de um conjunto com $2q$ elementos, há dois elementos consecutivos, cuja diferença é k. Então podemos escolher no máximo q elementos de um conjunto A_i com $2q$ elementos (basta escolhermos os elementos alternadamente, todos deixando o mesmo resto na divisão por $2k$). Da mesma forma, podemos escolher no máximo $q+1$ elementos de um conjunto A_j com $2q+2$ elementos e $q+1$ elementos de um conjunto A_ℓ com $2q+1$ elementos (dessa vez escolhendo o primeiro elemento do conjunto e assim escolher alternadamente).

Com isso, podemos concluir que

$$r_k = \begin{cases} kq+r & \text{se } 0 \le r \le k \\ k(q+1) & \text{se } k < r < 2k \end{cases}$$

Afirmamos que $r_k \le \frac{2n}{3}$ para todo k, $1 \le k \le \frac{n}{2}$. De fato, se $0 \le r \le k$ então lembrando que $n = 2kq + r \iff r = n - 2kq$ e $n = 2kq + r \le 2kq + k \implies k \ge \frac{n}{2q+1}$,

$$r_k = kq + r = kq + n - 2kq = n - kq \le n - q \cdot \frac{n}{2q+1} = \frac{(q+1)n}{2q+1} \le \frac{2n}{3}$$

pois $f(q) = \frac{q+1}{2q+1}$ é decrescente para $q > 0$. e se $k < r < 2k$ então $n = 2kq + r > 2kq + k \implies k < \frac{n}{2q+1}$ e

$$r_k = k(q+1) < \frac{(q+1)n}{2q+1} \le \frac{2n}{3}$$

Para $k = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ é possível construir o subconjunto

$$\left\{1, 2, 3, \ldots, \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right\} \cup \left\{2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2, \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 3, \ldots, n\right\}$$

que tem $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + n - 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$ elementos.

Assim, o valor máximo de r_k é $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

Considere os 108 pontos vermelhos e faça todas as 431 rotações possíveis. Conte as coincidências com pontos verdes: como cada ponto vermelho coincide com cada ponto verde exatamente uma vez, são 108^2 coincidências no total, dando uma média de $\frac{108^2}{431}$ coincidências por rotação. Então em uma delas há pelo menos $\left\lceil \frac{108^2}{431} \right\rceil = 28$ coincidências (o que quer dizer que existem dois 28-ágonos, um com vértices vermelhos e outro com vértices verdes, congruentes). Agora, rotacione esse 28-ágono outras 431 vezes e observe os pontos azuis. Analogamente, conseguimos uma média de $\frac{28 \cdot 108}{431}$ coincidências, e conseguimos uma rotação com $\left\lceil \frac{28 \cdot 108}{431} \right\rceil = 8$ coincidências, ou seja, três octógonos congruentes, um com vértices vermelhos, um com vértices verdes e outro com vértices azuis. Agora é só fazer isso mais uma vez e notar que $\left\lceil \frac{8 \cdot 108}{431} \right\rceil = 3$.

Os 2^k conjuntos $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_k$, em que $C_i = A_i$ ou $C_i = S - A_i$, são todos disjuntos. Se $2^k > n$, então um deles é vazio. Logo seu complemento (que é $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$, em que $D_i = S - C_i$), é S.

Por outro lado, se $2^k = n$, então podemos escolher k subconjuntos A_i tais que todas as 2^k interseções não são vazias. Isso quer dizer que todas as uniões possíveis são incompletas.

Logo a resposta é o que menor k tal que $2^k > n$, ou seja, $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.