Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória – Nível 3

Prof. Carlos Shine

Aula 8

Princípio do Extremo

A ideia chave na solução de muitos problemas em combinatória, ou até mesmo em teoria dos números e álgebra, é a simples consideração de um elemento extremo (máximo ou mínimo). Os próximos problemas mostrarão como essa ideia pode ser simples e ao mesmo tempo poderosa.

Lembramos aqui três fatos evidentes, mas muito pertinentes:

- Todo conjunto *finito* de reais tem um mínimo e um máximo, que não são necessariamente únicos.
- Todo conjunto não vazio de inteiros positivos tem um mínimo (esse é o *princípio da boa ordem*, que é equivalente ao princípio da indução finita.
- Um conjunto infinito A de reais pode ter ou não um elemento máximo ou mínimo (por exemplo, o intervalo real $]-\infty, 1[$ não tem nenhum dos dois). Se A é limitada superiormente, então admite um limitante superior mínimo $\sup A$ (supremo de A); se A é limitada inferiormente, então admite um limitante inferior máximo $\inf A$ (ínfimo de A). Cuidado: pode ser que $\sup A \notin A$ e $\inf A \notin A$. Por exemplo, $\sup(]-\infty, 1[) = 1 \notin]-\infty, 1[$.

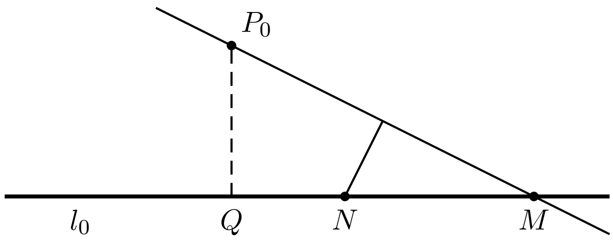
Exemplo 1. *(Leningrado 1988) Alguns pinos estão em um tabuleiro de xadrez. A cada segundo, um dos pinos se move para uma casa vizinha. Após muito tempo, verificou-se que cada pino havia passado por todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e voltado para a sua casa inicial. Prove que existiu um momento em que todos os pinos estavam fora de suas casas iniciais.*

Observação: duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum.

Solução: Seja P o primeiro pino que voltou para a sua posição inicial. A um movimento antes dele voltar para essa casa, cada um dos outros pinos deve ter feito um movimento. De fato, se isso não fosse verdade, P não poderia ter passado por todas as casas do tabuleiro. Assim, este será o momento em que todos os pinos estarão em casas diferentes das de onde partiram. $\square$

Exemplo 2. *(Teorema de Sylvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.*

Solução:

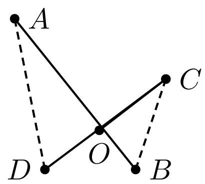


Seja L o conjunto de todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de S. Sejam também $P_0 \in S$ e $l_0 \in L$ tais que a distância entre P_0 e l_0 é a menor distância não-nula possível. Seja Q a projeção de P_0 sobre l_0. Como a reta l_0 passa por três pontos de S, pelo menos dois deles, digamos M e N, estão na mesma semi-reta (em relação a Q). Se N é o mais próximo de Q, então a distância entre N e a reta P_0M é menor que a distância entre P_0 e l_0, o que contraria a minimalidade dessa última. Isso mostra que todos os pontos de S devem estar sobre l_0, uma vez que o argumento acima mostra que não pode existir uma distância não-nula entre um ponto de S e uma reta em L. $\square$

Observação 1. *De certo modo, algum argumento de ordem ou distância deve ser usado, já que existem outras geometrias em que o teorema é falso (por exemplo, geometrias projetivas finitas).*

Exemplo 3. *(Putnam 1979) Considere $2n$ pontos no plano, quaisquer 3 deles não colineares. Pintamos n deles de vermelho e os outros de azul. Prove que é possível agrupar os pontos em pares utilizando segmentos com extremidades em pontos de cores distintas de modo que quaisquer dois segmentos não se cortem.*

Solução: Existem n^2 maneiras de parearmos esses pontos. É claro que alguns desses pareamentos não cumprem a condição do enunciado. Considere, para cada pareamento, a soma dos comprimentos de seus segmentos. Escolha o pareamento que tem a soma mínima. Por absurdo, suponha que existem dois segmentos AB e CD, A e C pintados de vermelho, que se cortam em um ponto O.



Pela desigualdade triangular, temos $AO + OD > AD$ e $OB + OC > CB$, e portanto $AB + CD > AD + CB$. Assim, diminuímos a soma dos comprimentos dos segmentos trocando AB e CD por AD e CB, o que contraria a minimalidade do pareamento tomado. Isso mostra que neste pareamento quaisquer dois segmentos não se cortam. $\square$

Exemplo 4. *Cada equipe de um torneio de vôlei joga com cada uma das outras exatamente uma vez. Ao fim do torneio, cada jogador faz uma lista com os nomes de todos os jogadores* *vencidos por ele e de todos os que foram vencidos pelos jogadores que ele venceu. Sabendo que não houve empates, prove que existe um jogador cuja lista possui o nome de todos os outros jogadores.*

Solução: Seja A a equipe que venceu mais partidas. Considere outra equipe B que venceu de A. Observe os jogos entre B e as equipes que perderam para A. A equipe B deve ter perdido alguma dessas partidas, pois, caso contrário, ela teria mais vitórias do que A. Assim, B está na lista de A. Como as equipes que perderam para A já estão em sua lista, concluímos que a lista de A contém todas as equipes. $\square$

Problemas

1. (Vietnã 1987) Dado um conjunto de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, mostre que existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

2. Dada uma quantidade finita (maior do que 3) de pontos no plano, prove que existe um círculo que passa por três desses pontos e não contém outros dos demais pontos em seu interior.

3. São dados $n \geq 3$ pontos no plano, nem todos colineares. Mostre que são necessárias pelo menos n retas para unir todos os possíveis pares de pontos.

4. São desenhadas $n \geq 3$ retas no plano tais que

   (i) quaisquer duas retas são concorrentes;

   (ii) por todo ponto de interseção entre duas retas passa pelo menos mais uma reta.

   Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

5. São dados $n \geq 3$ pontos no plano de forma que quaisquer três deles formam um triângulo de área menor que 1. Mostre que todos os n pontos estão no interior de um triângulo de área menor que 4.

6. (OBM) Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, \ldots, J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3, J_3 ganhou de J_4, ..., J_{k-1} ganhou de J_k, J_k ganhou de J_1.

   Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros.

7. São dados n pontos no plano. Marcamos os pontos médios de todos os segmentos com extremidades nesses n pontos. Prove que há pelo menos $2n-3$ pontos marcados distintos.

8. n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cuja soma é positiva são colocados em círculo. Prove que existe i tal que $a_i > 0$, $a_i + a_{i+1} > 0$, $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} > 0$, ..., $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+n-1} > 0$ (índices tomados módulo n).

9. O planeta Walrus possui 20 países. Sabe-se que, dentre quaisquer três desses países, existem dois sem relações diplomáticas. Prove que Walrus possui, no máximo, 200 embaixadas.

10. Em um pátio estão localizadas $2n+1$ pessoas, de modo que as distâncias entre quaisquer duas delas são distintas duas a duas. Em um dado momento, cada uma delas atira com um revólver de água na pessoa mais próxima de si. Supondo que todos os tiros foram certeiros, prove que:

    (a) Pelo menos uma pessoa não ficará molhada.

    (b) Ninguém levará mais de cinco tiros.

    (c) As trajetórias dos tiros não se cruzam.

    (d) Os segmentos formados pelas trajetórias dos tiros não formam um polígono convexo fechado.

11. Considere três escolas, cada uma com n alunos. Cada estudante tem ao todo $n+1$ amigos nas outras duas escolas em que ele não estuda. Prove que é possível selecionar um estudante de cada escola de tal forma que os três se conheçam mutuamente.

12. Em cada ponto de coordenadas inteiras do plano é escrito um inteiro positivo. Cada um desses números é igual à média aritmética de seus quatro vizinhos. Mostre que todos os números escritos são iguais.

13. Considere um tabuleiro 8×8, no qual escrevemos 0 ou 1 em cada uma das 64 casas. Sabe-se que, para cada casa contendo 0, a soma dos números escritos nas casas que estão na mesma linha ou na mesma coluna desta é maior ou igual a 8. Prove que a soma de todos os números escritos no tabuleiro é maior ou igual a 32.

14. O parlamento da Bruzundanga consiste de uma casa. Todo membro tem no máximo três inimigos dentre os restantes. Mostre que é possível separar a casa em duas partes de tal forma que cada membro tenha no máximo um inimigo na parte a que pertence.

15. (Leningrado 1989) Dado um natural $k \geq 1$, prove que é impossível colocar os números $1, 2, \ldots, k^2$ em um tabuleiro $k \times k$ de forma que as somas dos números escritos em cada linha e em cada coluna sejam potências de 2.

16. (Torneio das Cidades 1983) Os números $1, 2, \ldots, 1000$ são escritos ao redor de um círculo. Prove que é possível formar 500 segmentos que não se cruzam, cada um ligando dois destes números, de modo que a diferença em valor absoluto entre dois números ligados não seja maior que 749.

17. (Torneio das Cidades 1985) Oito times de futebol participam de um torneio, onde cada time joga contra todos os outros exatamente uma vez. Sabendo que não houve empates, prove que, ao término do torneio, é possível escolher quatro times A, B, C, D tais que: A derrotou B, C e D; B derrotou C e D; e C derrotou D.

18. (União Soviética 1984) Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 4$) são inteiros positivos arranjados, nessa ordem, em torno de um círculo. Sabe-se que a soma dos vizinhos de cada x_i é múltipla de x_i, ou seja, $(x_{i-1} + x_{i+1})/x_i = k_i$ é um inteiro ($x_{n+1} = x_1$ e $x_0 = x_n$). Prove que
$$2n \leq k_1 + \cdots + k_n < 3n.$$

19. (EUA 2007) Um *animal* com n casas é um figura conexa formada por n quadrados unitários de um tabuleiro (um animal também é conhecido como *poliminó* e pode ser definido indutivamente: dois quadrados são adjacentes se compartilham um lado. Um quadrado sozinho é um animal, e dado um animal com n quadrado, um animal com $n+1$ quadrados é obtido adicionando um novo quadrado adjacente a um ou mais quadrados existentes). Um *dinossauro* é definido como um animal com pelo menos 2007 quadrados. Um *dinossauro primitivo* não pode ser dividido em dois ou mais dinossauros. Qual é a maior quantidade de quadrados em um dinossauro primitivo?

Bibliografia

1. Arquivo do Treinamento da Cone Sul 2007, localizado em

   `http://conesul2006.tripod.com/Material/materialteorico2.pdf`.

2. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.

3. A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer 1998.

Respostas, Dicas e Soluções

1. É a contrapositiva do exemplo 2.

2. Considere o menor círculo que passa por três dos pontos.

3. Indução sobre n. Para $n = 3$, o resultado é imediato. Para $n > 3$, pelo teorema de Sylvester existe uma reta que passa por exatamente dois pontos. Retire um desses pontos, e com isso retiramos uma reta. Pela hipótese de indução precisamos de pelo menos $n - 1$ retas para os $n - 1$ pontos que sobraram, e com isso precisamos de pelo menos $n - 1 + 1 = n$ retas.

4. Adapte a demonstração do teorema de Sylvester: suponha que nem todas as retas passem pelo mesmo ponto e considere o conjunto de todas as interseções entre retas e considere o ponto de interseção A mais próximo de alguma reta r. Prove que existe um outro ponto de interseção mais próximo ainda de outra reta (lembre-se, três retas passam por A).

5. Considere o triângulo ABC de área máxima. Em qual região do plano podem estar os outros pontos? Lembre-se: não pode aparecer triângulo de área maior!

6. Utilize o resultado do exemplo 4. Na verdade, se tiver ciclo, um deles é pequeno (tem tamanho 3)!

7. Considere os dois pontos A e B mais distantes entre si. Os pontos médios dos segmentos com extremidades A ou B estão contidos nos círculos com centros A e B e raio $AB/2$, que só têm um ponto comum, que é o ponto médio de AB. Logo, como há $2(n-2)+1 = 2n-3$ segmentos com extremidades A ou B, há pelo menos $2n-3$ pontos médios.

8. Considere todas as somas a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $\ldots$, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$. Considere a soma mínima $a_1+a_2+\cdots+a_i$. Esse i é um índice que dá certo.

9. Considere o país p que tem relações diplomáticas com a maior quantidade de países. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_k$ esses países. Note que p_i e p_j não podem ter relações diplomáticas, pois senão p, p_i e p_j teriam todos relações diplomáticas entre si. Logo o número de pares de países com relações diplomáticas é no máximo $(20-k)k \le 100$. Isso porque cada um dos outros $20-k$ países têm relações diplomáticas com no máximo k outros países, e essa contagem já inclui os países $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Com isso, como cada para de países com relações diplomáticas exige uma embaixada em cada país, há no máximo 200 embaixadas.

   Observação 2. *Esse é um caso particular do teorema de Túran. Veremos esse teorema mais tarde.*

10. (a) Considere as duas pessoas mais próximas entre si. Elas vão molhar a si mesmas. Se outra pessoa atirar em uma dessas duas pessoas, o problema acaba pois essas duas pessoas gastaram três tiros. Se nenhuma pessoa a mais atirar em uma dessas duas pessoas, separamos essas duas pessoas e o problema sai por indução.

    (b) Considere as pessoas A, B, C, etc, que atiram em P, no sentido anti-horário em torno de P. Note que $AB > AP$ e $AB > BP$, logo $\angle APB$ é o maior ângulo do triângulo APB, de modo que $\angle APB > 60°$. Mas isso limita a quantidade de pessoas que atiram em P em menos de $360°/60° = 6$.

    (c) Veja o exemplo 3.

    (d) Suponha por absurdo que os tiros formem um polígono $A_1A_2A_3\ldots A_k$. Suponha que A_i atirou em A_{i+1} (sendo $A_{k+1} = A_1$). Como A_i **não** atirou em A_{i-1}, $A_1A_2 > A_2A_3 > A_3A_4 > \ldots > A_{k-1}A_k > A_kA_1 > A_1A_2$, absurdo.

11. Considere um estudante A que conhece a quantidade máxima k de estudantes de alguma das outras duas escolas. Então ele conhece $n+1-k \ge 1$ estudante(s) da outra escola. Seja B um deles. Se ele conhece algum dos k estudantes da outra escola, diferente da de A, o problema acaba. Se ele não conhece, ele conhece no máximo $n-k$ dos estudantes da segunda escola e pelo menos $n+1-(n-k) = k+1$ da primeira escola, contradizendo a maximalidade de A.

12. Considere o menor dos números m. Ele é a média dos seus vizinhos, e se algum número é maior do que m, algum outro vizinho deveria ser menor do que m, o que não é possível. todos os seus vizinhos são iguais a m, e a partir daí não é difícil ver que todos os números devem ser iguais a m.

13. Dentre as 16 linhas e colunas, considere a que tem menos números 1. Suponha que seja uma linha e seja k a quantidade de uns nessa linha. Se $k \geq 4$, cada linha tem pelo menos 4 uns e a soma dos números é pelo menos $8 \cdot 4 = 32$.

    Se $k < 4$, considere as $8-k$ colunas com zero nessa linha. Então a soma dos números em cada uma dessas colunas é pelo menos $8-k$, e o total dessas colunas é pelo menos $(8-k)^2$. A soma das outras k colunas é pelo menos k^2. Então a soma de todos os números é pelo menos $(8-k)^2 + k^2 = 2k^2 - 16k + 64 = 2(k-4)^2 + 32 > 32$.

14. Considere todas as partições do parlamento em duas casas, e para cada partição conte a quantidade E de inimigos que cada um tem na mesma casa. A partição que minimiza E é a que queremos. De fato, se algum membro do parlamento tem pelo menos dois inimigos na mesma casa, então na outra casa ele tem no máximo um inimigo. Se trocarmos ele de casa, o total E diminui, absurdo.

15. Suponha por absurdo que seja possível e seja 2^n a menor soma das linhas. Temos $2^n \geq 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Então todas as somas das linhas são múltiplas de 2^n, e a soma total, $\frac{k^2(k^2+1)}{2}$, é múltipla de 2^n. Assim, $\frac{k^2(k^2+1)}{2}$ é par e, portanto, k é par. Mas aí 2^n divide $\frac{k^2}{2} < \frac{k(k+1)}{2}$, absurdo.

16. Os números especiais são os de 251 a 750. Pinte-os de azul e os demais de vermelho. Ligue pontos consecutivos de cores diferentes e elimine-os.

17. Escolha como A o que venceu mais jogos; A venceu pelo menos quatro times B, C, D, E. Um deles, digamos B, venceu pelo menos dois dos outros, digamos C ou D. E podemos supor, sem perda de generalidade, que C venceu D.

18. O lado esquerdo sai por desigualdade das médias: basta notar que $\frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_{i-1}}{x_i} + \frac{x_{i+1}}{x_i}$ e fazer desigualdade das médias duas vezes, uma com a soma dos $\frac{x_{i-1}}{x_i}$ e outra com a soma dos $\frac{x_{i+1}}{x_i}$.

    O lado direito usa indução: primeiro façamos o passo: para $n > 4$, seja $x_k = M$ o maior número da sequência. Então $x_{k-1} \leq M$ e $x_{k+1} \leq M$, ou seja, $\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k} \leq 2$. Se essa fração é igual a 2 então não é difícil provar que $x_i = M$ para todo i, e a soma é $2n$; então a fração é igual a 1, ou seja, $x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$. Como $\frac{x_{k-2}+x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_{k-2}+x_k-x_{k-1}}{x_{k-1}} + 1 = \frac{x_{k-2}+x_{k+1}}{x_{k-1}} + 1$ e, analogamente, $\frac{x_{k-1}+x_{k+2}}{x_{k+1}} + 1$, podemos eliminar x_k; note que a soma diminui em 3 unidades (uma para cada uma das frações acima e a fração $\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k} = 1$). A nova sequência tem soma menor do que $3(n-1)$, então a soma original tem soma menor do que $3n$. Note que essa ideia vale na verdade até diminuirmos a sequência para três termos, de modo que só precisamos fazer a base para $n = 3$. Mas, usando a mesma ideia, podemos supor que os três números são $a, b, a+b$, e a soma é $\frac{a+b}{a+b} + \frac{2a+b}{b} + \frac{2b+a}{a} = 3 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$. Suponha sem perdas que $a \leq b$. Note que $b \mid 2a$, logo $a \leq b \leq 2a$, e sendo b divisor de a, $b = a$ ou $b = 2a$. No primeiro caso, a soma é 7; no segundo, é 8.

19. A resposta é $4 \cdot 2007 - 3$. Um exemplo é uma cruzinha com um quadrado no centro unida a quatro fileiras de 2006 quadrados. Agora, considere um dinossauro primitivo e

provemos que ele tem pelo menos $4 \cdot 2007 - 1$ quadrados. Considere o "subdinossauro" de 2007 quadrados cuja retirada minimiza a quantidade de animais restantes, nenhum deles igual a um dinossauro. Se sobram somente três animais, a quantidade máxima de quadrados é $2007 + 3 \cdot 2006 = 4 \cdot 2007 - 3$. Se sobram quatro ou mais animais, eles estão "grudados" ao subdinossauro em pelo menos dois quadrados. Mas aí construímos outro subdinossauro de tamanho 2007 juntando um dos animais ao subdinossauro e tirando os quadrados em volta de onde os outros animais estão grudados. Isso cria um subdinossauro cuja retirada nos dá menos animais, absurdo.